



Feuille d'exercices sur les espaces vectoriels

1 Combinaisons linéaires

Exercice 1. Déterminer si les vecteurs $(1, -1)$ et $(0, 0)$ sont combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -2)$. Plus généralement, quels sont les vecteurs de \mathbb{R}^2 qui sont combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?

Exercice 2. Le vecteur $(3, 7, -4)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 7)$ et $(3, 5, 6)$? Si oui, les coefficients de la combinaison linéaire sont-ils déterminés de manière unique ?

Exercice 3. A quelle condition sur les nombres réels a, b, c le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire de $(-1, 2, 2)$ et $(2, 1, -1)$?

Exercice 4. Le vecteur $(1, 2, 3)$ est-il colinéaire à $(0, 0, 0)$? Le vecteur $(0, 0, 0)$ est-il colinéaire à $(1, 2, 3)$? Les vecteurs $(0, 0, 0)$ $(1, 2, 3)$ sont-ils colinéaires ?

2 Sous-espaces vectoriels

Exercice 5. Montrer, en revenant à la définition, que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Exercice 6. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels, de \mathbb{R}^2 pour les deux premiers, de \mathbb{R}^3 pour le dernier : $A = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $B = \{(2x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $C = \{(s + 2t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$; $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = -1\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 8. Justifier le plus rapidement possible que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0, -2x + 3y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . De quel type est ce sous-espace, un plan ou une droite? Si c'est un plan, en trouver un vecteur normal. Si c'est une droite, trouver l'équation de son plan orthogonal passant par l'origine.

Exercice 9. On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $F \cap G = \{(2y, y, 3y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Exercice 10. Soient u, v deux vecteurs de E . Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u+v, u-v)$.

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

Exercice 12. Déterminer si le vecteur $(8, 2, -9)$ appartient au sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(2, 3, -5)$ et $(-4, -5, 8)$.

Exercice 13. Existe-t-il des réels x, y tels que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré dans \mathbb{R}^4 par la famille (e_1, e_2) , où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 14. 1. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$.
2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Vect}((1, 2, -1), (-6, 0, 2)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

Exercice 15. Déterminer une équation linéaire, ou un système d'équations linéaires, caractérisant les éléments de $\text{Vect}((1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, -8, -2, 7))$.

4 Sommes, sommes directes, sous-espaces supplémentaires

Exercice 16. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On définit $F = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$ et $G = \{(x, y, z, t); x + y + z + t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 17. On note \mathcal{P} l'ensemble des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et \mathcal{I} l'ensemble des fonctions impaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. Décomposer la fonction \exp dans cette somme directe.

5 Familles génératrices, familles libres

Exercice 18. 1. Déterminer une famille génératrice de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

2. Montrer que $((-3, 2, 1), (1, 0, -1))$ est une famille génératrice de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Exercice 19. Soit a un nombre réel. Soient u, v, w les vecteurs de \mathbb{R}^3 définis par $u = (1, -2, 0)$, $v = (1, a, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$. Pour quelle valeur de a ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 20. On suppose que la famille (u, v, w) est libre. Montrer qu'alors la famille $(v + w, u + w, u + v)$ est également libre.

6 Bases, dimension

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel admettant une base (e_1, e_2, e_3) . Montrer que $(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ est également une base de E .

Exercice 22. Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 5y + z = 0, y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + z - 2t = 0, x + y + t = 0, 2x - y + 3z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 2x_2 - x_3, x_4 = x_1 + x_2 + x_3\}$.

Exercice 23. On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 suivants : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y + 2z + 3t = 0\}$. Donner une base et la dimension de F , de G , de $F \cap G$.

Exercice 24. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - y + 2z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , déterminer une base de F , donner la dimension de F , puis compléter la base trouvée en une base de \mathbb{R}^3 .

- Exercice 25.**
1. Justifier que $F = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = t \text{ et } t - x + y = 0\}$ est un espace vectoriel.
 2. Donner une base et la dimension de F .
 3. On note $G_1 = \text{Vect}((0; 1; 1; 0), (-1; 4; 0; 1))$ et $G_2 = \text{Vect}((0; -1; 1; 0), (-1; 4; 0; 1))$.
 - a) Déterminer la dimension de G_1 et celle de G_2 .
 - b) Montrer que $F \cap G_1 = 0$. En déduire que $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$.
 - c) Est-ce que $F \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$?

Exercice 26. Soit E (respectivement F) le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs e_1 et e_2 (respectivement par les vecteurs e_3 et e_4), où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Montrer que E et F sont égaux.

7 Révision sur les systèmes linéaires

Exercice 27. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 8 \\ 2x + y + z + t = -1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

Exercice 28. Résoudre le système linéaire suivant en les variables x, y, z en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

8 Exercices supplémentaires

Les exercices de cette section sont plus difficiles ou plus abstraits que les précédents, ou font appel à des notions que vous ne connaissez pas nécessairement pour le moment ; ils peuvent être abordés en seconde lecture.

Exercice 29. Montrer que la fonction polynomiale $x^3 - 2x^2 + 2x$ est combinaison linéaire des fonctions $1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3$.

Exercice 30. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: (1) le sous-ensemble A constitué des fonctions dérivables ; (2) le sous-ensemble B constitué des fonctions f deux fois dérivables vérifiant $f'' + 2f' - 3f = 0$; (3) le sous-ensemble C constitué des fonctions f telles que $f(0) = 1$; (4) le sous-ensemble D constitué des fonctions f telles que $f(1) = 0$.

Exercice 31. Dans l'espace $E = \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ des suites réelles indexées par les entiers positifs ou nul, déterminer si les sous-ensembles suivants sont stables par addition et/ou stables par multiplication scalaire : (1) le sous-ensemble A constitué des suites u telles que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; (2) le sous-ensemble B constitué des suites u telles que $u_n u_{n+2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; (3) le sous-ensemble C constitué des suites u qui admettent une limite ; (4) le sous-ensemble D constitué des suites u qui admettent une limite égale à π .

Exercice 32. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 réelles : l'ensemble des matrices dont la première colonne est nulle ; l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont positifs ou nuls ; l'ensemble des matrices dont les deux lignes sont identiques ; l'ensemble des matrices de trace nulle ; l'ensemble des matrices inversibles.

Exercice 33. Soit F le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ composé des matrices de la forme :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

On pose $I = M(1, 0)$ et $J = M(1, 1)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, de base (I, J) .

Exercice 34. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On souhaite montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Pour cela :

1. Montrer que l'un des deux sens du « si et seulement si » est évident.
2. Pour démontrer l'autre sens, raisonner par l'absurde (comment nie-t-on un « ou » ? comment nie-t-on une inclusion ? penser à utiliser toutes les hypothèses).