MAX708X : séance du 20 octobre 2026

A anneau principal ($A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{F}[X]$)

Théorème de structure : Soit M un A-module de type fini

- $\exists\, s, t \in \mathbb{N}$
- si $t \geq 1$, il existe
  - $d_1, \dots, d_t \in A$
  - $d_i \neq 0$ et d_i non inversible
  - $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_t$

tels que

$$M \simeq A^s \times A/d_1A \times \dots \times A/d_tA$$

De plus les quantités $s, t, (d_1) \supseteq (d_2) \supseteq \dots \supseteq (d_t)$ sont uniques

Ici $M_{tor} \simeq A/d_1A \times \dots \times A/d_tA$

Alors $M/M_{tor} \simeq A^s$

c'est à dire $s = \text{rang}\left(M/M_{tor}\right)$

Preuve : soit $\{x_1, \dots, x_\ell\} \in M$ une famille génératrice.

$$\varphi : A^\ell \longrightarrow M$$
$$(a_1, \dots, a_\ell) \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} a_i \cdot x_i$$

φ est un morphisme de A-Modules.

$\mathrm{Imag}(\varphi) = M$

Cela induit un isomorphisme

$$\boxed{\overline{\varphi} : A^\ell / \mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\simeq} M}.$$

A^ℓ = module libre de rang ℓ

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ = ——— $\ell' \leq \ell$

Théorème de la base adaptée : $\exists$ une base $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ de A^ℓ et $d_1 \mid \dots \mid d_{\ell'}$ dans A tels que $\{d_1 b_1, \dots, d_{\ell'} b_{\ell'}\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$

$d_1 \mid \dots \mid d_{\ell'}$: $(d_1) \supseteq (d_2) \supseteq \dots \supseteq (d_{\ell'})$

$$\begin{cases} \text{on pose } \alpha = 0 \text{ si } (d_1) \neq A \\ \text{sinon } \alpha = \sup\{ i \mid (d_i) = A \} \end{cases}$$

si $\alpha \geq 1$: la suite des d_i sera

$$\underbrace{1 \mid 1 \mid \dots \mid 1}_{\alpha \text{ termes}} \mid d_{\alpha+1} \mid \dots \mid d_{\ell'}$$

$$A^\ell = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{\alpha} A f_i}_{(1)} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=\alpha+1}^{\ell'} A f_i}_{(2)} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=\ell'+1}^{\ell} A f_i}_{(3)}$$

$$\| \qquad \| \qquad \|$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{\alpha} A f_i}_{(1)} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=\alpha+1}^{\ell'} A d_i f_i}_{} \oplus \underbrace{0}_{}$$

Alors $$A/\mathrm{Ker}\,\varphi \simeq \bigoplus_{i=\alpha+1}^{\ell} A f_i / A d_i f_i \oplus \bigoplus_{i=\ell'+1}^{\ell} A f_i$$

$$A f_i / A d_i f_i \simeq A/d_i A \qquad | \qquad A f_i \simeq A$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\boxed{d_i A = (d_i)}$

Conclusion : $s = l - l' \geq 0 ; \; t = l' - d$

$\tilde{d}_i = d_{d+i}$, $1 \leq i \leq t$

On obtient

$$M \simeq A^l / \mathrm{Ker}(\varphi) \simeq A^s \times A/\tilde{d}_1 A \times \cdots \times A/\tilde{d}_t A$$

Version 2 $\varphi : A^l \longrightarrow M$

$$A^l = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^{d} A f_i}_{\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=d+1}^{l'} A f_i}_{①} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=l'+1}^{l} A f_i}_{②}$$

① : $n_i = \varphi(f_{d+i})$ $\quad 1 \leq i \leq l' - d = t$

② : $m_j = \varphi(f_{l'+j})$ $\quad 1 \leq j \leq l - l' = s$

Image de φ :

$$M = \bigoplus_{i=1}^{t} A n_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} A m_j$$

$$\begin{cases} A m_i \simeq A/d_i A & \text{(de torsion)} \\ A m_j \simeq A & \text{(module libre)} \end{cases}$$

Deux mots sur l'unicité :

M A-module de type fini

$p \in A$ irréductible $\Rightarrow$ $\boxed{A/pA = \text{Corps}}$

$$\boxed{M \supseteq pM} \supseteq p^2 M \supseteq \dots \supseteq p^k M \supseteq \dots$$

Fait important : $\boxed{M/pM \text{ est } A/pA\text{-espace vectoriel}}$

$$\boxed{p^k M / p^{k+1} M \text{ est un } A/pA\text{-espace vectoriel}}$$

Ici $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$

où $\boxed{M_i \simeq \begin{cases} A, \text{ ou} \\ A/d_i A ; \ d_i A \neq A \end{cases}}$

$$pM \simeq pM_1 \oplus \cdots \oplus pM_n$$

$$\boxed{M/pM \simeq M_1/p_1M \oplus \cdots \oplus M_i/p_iM}$$

- $M_i \simeq A \longrightarrow M_i/pM_i \simeq A/pA$

- $M_i = A/d_iA \Rightarrow M_i/pM_i \simeq \begin{cases} 0 \text{ si } p \wedge d_i = 1 \\ A/pA \text{ si } p \mid d_i \end{cases}$

Corollaire : $\boxed{\dim_{A/pA}\left(M/pM\right) = \text{Card}\left(i, M_i \simeq A\right) + \text{Card}\left(j, p \mid d_j\right)}$

égale à Δ

Avec cette technique on peut montrer l'unicité des "d_i" !

---

lorsque M est de torsion ($M = M_{tor}$) :

alors $\boxed{M \simeq A/d_1 A \times \dots \times A/d_t A \quad \text{avec} \quad d_1 \mid \dots \mid d_t}$

les "d_i" sont les facteurs invariants de M

Exemple : Soit

$$G = \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/432\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$$

Trouver les facteurs invariants de G

Etape 1 :

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 100 &= 2^2 \cdot 5^2 \\ 432 &= 2^4 \cdot 3^3 \\ 1000 &= 2^3 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

Bezout :

$$G \simeq \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}\right) \times \left(\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z}\right) \times \left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^3\mathbb{Z}\right).$$

	2	3	5	
	2^4	3^3	5^3	$d_4 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3$
	2^3	3^2	5^2	$d_3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
	2^2	1	5^1	$d_2 = 2^2 \cdot 5^1$
	2^1	1	1	$d_1 = 2^1$

On a $\boxed{d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid d_4 \qquad G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_4\mathbb{Z}}$

Application du théorème de structure pour les groupes abéliens finis

Th G groupe abélien fini. $\exists\, d_1 \mid \cdots \mid d_n$, $d_i \geq 2$, tels que $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$

G groupe abélien de type fini $\iff$ $G \simeq \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$.

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$$
$$d_1 \mid \cdots \mid d_n$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$

Alors $d_n x = (d_n x_1, \dots, d_n x_n)$

Comme $d_i \mid d_n$; $d_n x_i = 0 \ \forall i$.

On a $\boxed{d_n x = 0 \ , \ \forall x \in G}$

Supposons que $d \geq 2$ vérifie $dx = 0 \ \forall x \in G$

$\Updownarrow$

$\forall i, \forall x_i \in \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, \ dx_i = 0$

$\Updownarrow$

$d_i \mid d$ pour tout i

$\Updownarrow$

Comme $d_1 \mid \cdots \mid d_n$

$d_n \mid d$

On $\boxed{d_n = \min\{d \geq 1 \ ; \ dx = 0 \ \forall x \in G\}}$

$= d(G)$

G abélien fini d'ordre N

$d(G) = \inf\left(d \geq 1,\ dx = 0 \ \forall x \in G\right)$

$d(G) \leq N$

$$d(G) = d_n$$

De plus, il y a un élément du groupe G d'ordre égal à $d(G)$

on prend $x_0 = (0, \dots, 0, \bar{1})$ avec $\bar{1} \in \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$

On voit que $\langle x_0 \rangle \simeq \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$

ordre $x_0 = d_n$

Exercice : $\mathbb{F}$ un corps fini

Alors $\mathbb{F}^\times$ est un groupe cyclique

Appliquons ce que l'on vient de faire pour $G = \mathbb{F}^\times$. Posons $d = d(\mathbb{F}^\times) \leq \mathrm{card}(\mathbb{F}^\times)$

On a $x^d = 1 \quad \forall x \in \mathbb{F}^\times$

$$x^{d+1} = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

$d+1 \leq \mathrm{card}(\mathbb{F})$

le polynôme $X^{d+1} - X$ a pour racines tous les éléments de $\mathbb{F}$

$d+1 \geqslant \mathrm{card}(\mathbb{F})$

Conclusion : $\boxed{d = \mathrm{card}(\mathbb{F}^\times)}$

de plus il existe $x \in \mathbb{F}^\times$ d'ordre égal à d, i.e. $\langle x \rangle = \mathbb{F}^\times$

FIN