MAX708X : Séance du 19 octobre

Exercice 29 :

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; 2x - y + 5z \in 6\mathbb{Z} \right\}$$

$$N = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x - y + z \in 4\mathbb{Z} \\ 3x + y + 8z \in 10\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

Etude de M :

$$\varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (x,y,z) \longmapsto 2x - y + 5z$$

Etape 1

- définition : $M = \varphi^{-2}(6\mathbb{Z})$
- $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}$: $e_2 = (0,1,0)$; $\varphi(e_2) = -1$
- Décomposition : $\mathbb{Z}^3 = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{Z}e_2$

v_0

$v \in \mathbb{Z}^3$: $v = \underbrace{[v + \varphi(v)e_2]}_{\in \mathrm{Ker}(\varphi)} + \underbrace{[-\varphi(v)e_2]}_{v_1}$

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\}) \subseteq \varphi^{-2}(6\mathbb{Z}) = M$

Décomposition de M : $M = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{Z}e_2 \cap M$

$v \in M$: $v = v_0 + v_1$

Alors $v_1 = v - v_0 \in M \cap \mathbb{Z}e_2$

$$ke_2 \in M \iff \varphi(ke_2) \in 6\mathbb{Z}$$

$$\iff k \in 6\mathbb{Z}$$

$$M = \underline{\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{Z}(6e_2)}$$

Etape 2

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ 2x - y + 5z = 0 \} \subset \mathbb{Z}^3$$

$$y = 2x + 5z \quad //$$

$$(x, y, z) = (x, 2x+5z, z)$$

$$= (x, 2x, 0) + (0, 5z, z)$$

$$= x\underbrace{(1,2,0)}_{b_1} + z\underbrace{(0,5,1)}_{b_2}$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z} b_1 \oplus \mathbb{Z} b_2$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} b_1 \oplus \mathbb{Z} b_2 \oplus \mathbb{Z} e_2 \\ M = \mathbb{Z} b_1 \oplus \mathbb{Z} b_2 \oplus \mathbb{Z} 6e_2 \end{array}}$$

$\{ b_1, b_2, e_2 \}$ base de $\mathbb{Z}^3$

$\{ b_1, b_2, 6e_2 \}$ base de M

Etude de N : $N = \left\{ \begin{array}{l} x - y + z \in 4\mathbb{Z} \\ 3x + y + 8z \in 10\mathbb{Z} \end{array} \right\}$

$$\Psi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$(x,y,z) \longmapsto (x - y + z,\ 3x + y + 8z)$$

$$\Psi(x,y,z) = x(1,3) + y(-1,1) + z(1,8)$$

$$\text{Image}(\Psi) = \langle (1,3), (-1,1), (1,8) \rangle$$

Rmq : $\boxed{\langle v_1, \dots, v_p \rangle = \langle v_1, \dots, v_{p-1}, v_p + \sum_{i=1}^{p-1} a_i v_i \rangle}$

$a_i \in \mathbb{Z}$

$$\text{Image}(\Psi) = \langle (-1,1), (0,4), (0,9) \rangle$$

$4\mathbb{Z} + 9\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ donc $\left\{ \begin{array}{l} (0,1) \\ (1,0) \end{array} \right\} \in \text{Image}(\Psi)$

Conclusion : $\boxed{\text{Image}(\Psi) = \mathbb{Z}^2}$

Cherchons $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}^3$ tq $\boxed{\begin{array}{l} \Psi(b_1) = (1,0) \\ \Psi(b_2) = (0,1) \end{array}}$

Pour f_1 :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & (L1) \\ 4y + 5z = -3 & (L2) - 3(L1) \end{cases}$$

une solution $\boxed{y = 3 \,,\ z = -3 \,,\ x = 7}$

$$\boxed{f_1 = (7, 3, -3)}$$

Pour f_2 :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y + 8z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 & L1 \\ 4y + 5z = 1 & (L2) - 3(L1) \end{cases}$$

$y = -1 \,;\ z = 1 \,,\ x = -2$

$$\boxed{f_2 = (-2, -1, 1)}$$

Récapitulons :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \varphi(f_1) = (1, 0) \\ \varphi(f_2) = (0, 1) \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{Z}^3 = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathbb{Z} f_1 \oplus \mathbb{Z} f_2}$$

$v \in \mathbb{Z}^3$; $\psi(v) = (a, b)$

$\Leftrightarrow \psi(v) = a\,\psi(b_1) + b\,\psi(b_2)$

$\Leftrightarrow v - a b_1 - b b_2 \in \ker \psi$

$$\ker(\psi) = \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{array} \right\}$$

$$(x, y, z) \in \ker(\psi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{array} \right.$$

Comme $4 \wedge 5 = 1$, on a $\left\{ \begin{array}{l} y = 5t \\ z = -4t \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{Z}$

avec (L1) on a $x = y - z = 9t$

Conclusion : $(x, y, z) = (9t, 5t, -4t) = t\, b_0$

avec $b_0 = (9, 5, -4)$

Base de $\mathbb{Z}^3$:

$\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} b_0 \oplus \mathbb{Z} b_1 \oplus \mathbb{Z} b_2$

$\psi(b_0) = (0, 0)$

$\psi(b_1) = (1, 0)$

$\psi(b_2) = (0, 1)$

$\neq$ Am

$$N = \{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid \psi(x, y, z) \in 4\mathbb{Z} \times 10\mathbb{Z} \}$$

$v \in \mathbb{Z}^3$: $\left| \begin{array}{l} v = a f_0 + b f_1 + c f_2 \\ a, b, c \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} \psi(v) = a \psi(f_0) + b \psi(f_1) + c \psi(f_2) \\ \qquad = (b, c) \end{array} \right.$

$v \in N \iff b \in 4\mathbb{Z}$ et $c \in 10\mathbb{Z}$

Conclusion : $N = \mathbb{Z} f_0 \oplus \mathbb{Z}(4 f_1) \oplus \mathbb{Z}(10 f_2)$

$\{f_0, f_1, f_2\}$ base de $\mathbb{Z}^3$

$\{f_0, 4f_1, 10f_2\}$ base de N

base adaptée.

ici on n'a pas "$d_1 | d_2 | d_3$"

Th de la base adaptée : $\left| \begin{array}{l} M \ \mathbb{Z}\text{-module libre de type fini} \\ N \subset M \text{ un module} \\ \text{avec rang } N = \text{rang } M \end{array} \right.$

Alors il existe $\{f_1, \dots, f_p\}$ et $d_1 | \dots | d_p$:

- $\{f_1, \dots, f_p\}$ base de M
- $\{d_1 f_1, d_2 f_2, \dots, d_p f_p\}$ base de N

Fin des deux exemples :

On a énoncé le théorème de la base adaptée

Théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal.

Th (version 1) : Soit M un A-module de type fini. Alors il existe $m_1, \dots, m_q \in M$ des éléments non nuls tels que :

$$M = Am_1 \oplus Am_2 \oplus \dots \oplus Am_q$$

$$\operatorname{ann}_A(m_1) \supseteq \operatorname{ann}_A(m_2) \supseteq \dots \supseteq \operatorname{ann}_A(m_q)$$

Remarque : $m \in M - \{0\}$

$Am = \{a \cdot m \,;\, a \in A\} = \langle m \rangle$ est un sous-module de M.

Attention : (Am n'est pas un module libre en général)

$$\mathrm{ann}_A(m) = \{ a \in A \mid a \cdot m = 0 \}$$

$$\varphi_m : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Am \\ a & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$ morphisme de A-modules

$$\mathrm{Ker}(\varphi_m) = \mathrm{ann}_A(m).$$

$$\boxed{A/\mathrm{ann}_A(m) \simeq Am}$$

Rmq $v \in \mathbb{Z}^n$: $\mathbb{Z}v = \{kv, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}v \\ k & \longmapsto & kv \end{array}$$ isomorphisme

Rmq : $M = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \overline{x} = x + 10\mathbb{Z} \\ \overline{\overline{y}} = y + 45\mathbb{Z} \end{cases}$$

$m_1 = (\overline{1}, \overline{\overline{5}})$

$\mathbb{Z}m_1 = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \{0\}$

$m_2 = (\overline{0}, \overline{\overline{1}})$

$\mathbb{Z}m_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$

$M = \mathbb{Z}m_1 \oplus \mathbb{Z}m_2$

Attention : les $\mathbb{Z}m_i$ ne sont pas des modules libres

$\mathbb{Z}$ - Modules $\begin{cases} \nearrow \mathbb{Z}^n & \text{libre de type fini} \\ \searrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \text{de type fini, et} \end{cases}$

$$\left(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)_{tor} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

Exemple : $m \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} = G$

$\mathbb{Z}m$ sous groupe de G, donc $\#\mathbb{Z}m = N$

$\mathbb{Z}m \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Th (version 2) Soit Π un A-module de type fini. Alors il existe $d_1, \dots, d_s \in A$, $d_i \neq 0$, $d_i \notin A^\times$, $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_s$, $t \in \mathbb{N}$

Soit $M \simeq A^t \times (A/d_1A) \times \cdots \times (A/d_sA)$

(isomorphisme de A-modules)

Prop : $s \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, $(d_1) \supseteq (d_2) \supseteq \cdots \supseteq (d_s)$ sont uniques

On a $M_{tor} = \{ m \in M \mid \exists a \in A - \{0\},\ a \cdot m = 0 \}$

$$M_{tor} \simeq \left(A^t \times A/d_1A \times \cdots \times A/d_sA \right)_{tor}$$

$$\simeq (A^t)_{tor} \times \left(A/d_1A \right)_{tor} \times \cdots \times \left(A/d_sA \right)_{tor}$$

- Comme A^t est un module libre $(A^t)_{tor} = \{0\}$
- $d_1 x = 0$ dans A/d_1A : $(A/d_1A)_{tor} = A/d_1A$

On a

$$\begin{cases} M \simeq A^t \times A/d_1A \times \cdots \times A/d_sA \\ M_{tor} \simeq \{0\} \times A/d_1A \times \cdots \times A/d_sA \end{cases}$$

Alors $\boxed{M/M_{tor} \simeq A^t}$ $\qquad \boxed{t = \operatorname{rang}\left(M/M_{tor}\right)}$

Propriété : Si M est un A-module de type fini alors M/M_{tor} est un A-module libre de type fini

FIN