Séance du 16 octobre

A anneau principal

Prop Soit M un A-module libre de rang $n \geq 1$.
Soit $N \subseteq M$ un sous A-module
Alors N est libre et $\text{rang}(N) \leq \text{rang}\, M$

On n'a pas obtenu de relations entre les base de M et celles de N

Exemple : $M = \mathbb{Z}^2$

$$N = \left\langle \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$e_1^* : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x$$

$$\begin{cases} e_1^*(N) = 10\mathbb{Z} + (-6)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \\ \widetilde{b_1} = 2\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 34 \end{pmatrix} \\ e_1^*(\widetilde{b_1}) = 2 \end{cases}$$

définition : $f_1 = \frac{1}{2} \tilde{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} f_1 \oplus \mathrm{Ker}(e_1^*)$$

Soit $v \in \mathbb{Z}^2$ et on pose $k = e_1^*(v)$

Comme $e_1^*(f_1) = 1$, $k = e_1^*(k f_1)$

et donc $v - k f_1 \in \mathrm{Ker}(e_1^*)$.

Conséquence :

$$v = \underbrace{e_1^*(v) f_1}_{\in \mathbb{Z} f_1} + \underbrace{v - e_1^*(v) f_2}_{\in \mathrm{Ker}\, e_1^*}$$

$$\mathbb{Z} f_2 \cap \mathrm{Ker}\, e_1^* = 0$$

Prop

$$N = \mathbb{Z}(2 f_1) \oplus \mathrm{Ker}(e_1^*) \cap N$$

$v \in N$, alors $e_1^*(v) = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} e_1^*(2k f_1) = 2k \\ 2 f_2 \in N \end{cases}$$

$v \in N$ se décompose

$$v = \underbrace{2k f_1}_{\in \mathbb{Z} 2 f_1 \subset N} + \underbrace{v - 2k f_1}_{\in \mathrm{Ker}(e_1^*) \cap N}$$

$\boxed{\mathrm{Ker}(e_1^*) \cap N}$ $\quad V = a\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(e_1^*)$

$$\Leftrightarrow \quad 10a - 6b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5a = 3b$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 3\alpha \\ b = 5\alpha \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{Z}$$

Alors $V = 3\alpha\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix} + 5\alpha\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\54\alpha\end{pmatrix}$

$\boxed{f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$ $\qquad \boxed{\mathrm{Ker}(e_1^*) \cap N = \mathbb{Z}\, 54 f_2}$

Conclusion : $\boxed{\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &= \mathbb{Z} f_1 \oplus \mathbb{Z} f_2 \\ N &= \mathbb{Z}\, 2 f_1 \oplus \mathbb{Z}\, 54 f_2 \end{aligned}}$

On a montré que $\exists f_1, f_2 \in \mathbb{Z}^2$ tels que

1) $\{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{Z}^2$.
2) $\{2f_1, 54 f_2\}$ est une base de N.

on a deux bases adaptées.

Théorème de la base adaptée (sur A)

Soit M un module libre de rang p
Soit N un sous module de rang $\ell \leq p$
Alors il existe $f_1, \dots, f_p$ et $d_1 \backslash \dots \backslash d_\ell$
tels que (1) $\{f_1, \dots, f_p\}$ base de M
(2) $\{d_1 f_1, \dots, d_\ell f_\ell\}$ base de N

On se consacre à la preuve du théorème :

base $e_1, \dots, e_p$ de M

base duale $e_1^*, \dots, e_p^*$ de $\hom_A(M, A)$

démonstration :

$v \in M$

$$v = \sum_{i=1}^{p} e_i^*(v) \cdot e_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{p} e_i^*(w) \cdot e_i$$

$$v + w = \sum_{i=1}^{p} \left(e_i^*(v) + e_i^*(w) \right) \cdot e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} e_i^*(v+w) \cdot e_i$$

Prop $\boxed{e_i^*(v+w) = e_i^*(v) + e_i^*(w)}$

Prop $\boxed{e_i^* \in \hom_A(M, A)}$

Soit $\varphi : M \longrightarrow A$ un morphisme de A-module

$$v = \sum_{i=1}^{p} e_i^*(v) \cdot e_i$$

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{e_i^*(v)\,\varphi(e_i)}_{\text{produit dans } A}, \quad \forall v$$

$$\bullet\ e_i^*(v)\,\varphi(e_i) = \left(\varphi(e_i)\cdot e_i^*\right)(v)$$

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in A}\cdot \underbrace{e_i^*}_{\hom_A(M,A)}}$$

Retour à la preuve du théorème de la base adaptée :

Rappel : $\hom_A(M,A) = \{ f : M \to A \text{ morphisme de } A\text{-modules} \}$

loi + : $(f+g)(m) \underset{\text{DEF}}{=} f(m) + g(m)$

loi · : $(a\cdot f)(m) = a\,f(m)$

Point déf : $\begin{cases} N \subset M & \text{sous } A\text{-module} \\ f \in \hom_A(M,A) \end{cases}$

Alors $f(N)$ est un idéal de A

$\exists\, d_{f,N} \in A, \quad f(N) = (d_{f,N})$

Def $\mathcal{E}(N) = \{ f(N) \mid f \in \hom_A(M, A) \}$

Prop $\mathcal{E}(N)$ possède un plus grand élément

Preuve de cette propriété : • Soit $I_1 \in \mathcal{E}(N)$

$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3$ ← cette suite est stationnaire car A principal.

• Soit $J \in \mathcal{E}(N)$ un élément maximal de $\mathcal{E}(N)$.

Notre but est de montrer que J est le plus grand élément de $\mathcal{E}(N)$.

Soit $\varphi_1 \in \hom_A(M, A)$ et $d_1 \in A$

tel que $\boxed{\varphi_1(N) = J = (d_1)}$

il existe un vecteur $n_1 \in N$ tq $\boxed{\varphi_1(n_1) = d_1}$

$n_1 \in M$: $n_1 = \sum_{i=1}^{p} e_i^*(n_1) \cdot e_i$

Lemme : $\boxed{d_1 \text{ divise } e_i^*(n_1), \ \forall i}$

Supposons le contraire :

$$\begin{cases} (d_1) + (e_i^*(n_1)) = (\delta) \\ (d_1) \neq (\delta) \end{cases}$$

Utilisons Bezout : $\exists \alpha, \beta \in A \quad \alpha d_1 + \beta e_i^*(n_1) = \delta$

Forme linéaire : $\boxed{\psi = \alpha \varphi_1 + \beta e_i^*}$

$$\psi(n_1) = \alpha d_1 + \beta e_i^*(n_1) = \delta$$

Alors $\varphi_1(N) = (d_1) \subsetneq (\delta) \subseteq \psi(N)$

Ce qui contredit la maximalité de $\varphi_1(N)$.

Dans ce cas $\exists\, m_1 \in M$ tel que

$$\boxed{n_1 = d_1 m_1}$$

$$m_1 = \frac{\text{“}n_1\text{”}}{d_1} \underset{\text{DEF}}{=} \sum \frac{e_i^*(n_1)}{d_1} \cdot e_i$$

Récapitulons : . $\varphi_1 : N \longrightarrow A$

. $m_1 \in M$

. $d_1 \in A$

Mais que

$\varphi_1(N) = (d_1)$ (1)

$\varphi_1(m_1) = 1$ (2)

$d_1 m_1 \in N$ (3)

$\varphi_1(N)$ est maximal dans $\mathcal{E}_N$

Alors

$$M \underset{(2)}{=} A m_1 \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_1)$$

$$N = A d_1 m_1 \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap N$$

(1) et (3)

Montrons que $\varphi_1(N)$ est le plus grand élément de $\mathcal{E}_N$:

Soit $\psi : M \longrightarrow A$ un morphisme

En utilisant $M = A m_1 \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_1)$

on peut définir $\tilde{\psi} : M \longrightarrow A$

$$\tilde{\psi}(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = m_1 \\ \psi(m) & \text{si } m \in \mathrm{Ker}(\varphi_1). \end{cases}$$

En utilisant $N = A d_1 m_1 \oplus \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap N$

$$d_1 = \tilde{\psi}(d_1 m_1) \in \tilde{\psi}(N)$$

On obtient $\varphi_1(N) = (d_1) \subseteq \tilde{\psi}(N)$

Comme $\varphi_1(N)$ est maximal, on a

$$\varphi_1(N) = \tilde{\psi}(N)$$

Par construction $\psi(N) \subseteq \tilde{\psi}(N) = \varphi_1(N)$

On a montré $\psi(N) \subseteq \varphi_1(N)$

Récapitulons : $\begin{cases} d_1 \in A \\ \varphi_1 \in \hom_A(M, A) \end{cases}$

$\forall \psi \in \hom_A(M, A)$

$\psi(N) \subseteq (d_1) = \varphi_1(N)$

2 décompositions :

$$M = A m_1 \oplus M'$$

$$N = A d_1 m_1 \oplus N'$$

$$M' = \ker(\varphi_1)$$

$$N' = \ker(\varphi_1) \cap N$$

Le théorème de la base adaptée se démontre grâce à récurrence sur le rang de M

Supposons le résultat vrai
au rang p et
Considérons M un
A-module de rang $p+1$
libre

On applique l'hypothèse
de récurrence à $N' \subseteq M'$

$\exists \{m_2, \dots, m_{p+2}\}$ base de M'

$\exists d_2 | \dots | d_{p+1}$ dans A

tels que

$\{d_2 m_2, \dots, d_{p+2} m_{p+2}\}$ base de N'

Conclusion

$\{m_1, m_2, \dots, m_{p+1}\}$ base de M

$\{d_1 m_1, d_2 m_2, \dots, d_e m_e\}$ base de N

Il faut justifier $d_1 \mid d_2$

(d_1) est le plus grand idéal de $\Sigma(N)$

(d_2) ——————————— de $\Sigma(N')$

$$N = A^{d_1 m_1} \oplus N'$$

$$M = A^{m_1} \oplus M'$$

$$\Sigma(N') \subseteq \Sigma(N)$$

$$\Downarrow$$

$$(d_2) \subseteq (d_1)$$

i.e.

$$\boxed{d_1 \mid d_2}$$

FIN

$\boxed{p=1}$

$$\begin{array}{ccc} M = Am_1 & \xleftarrow{\sim} & A \\ \lambda \cdot m_1 & \longleftarrow & \lambda \\ \cup\!\!\mid & & \cup\!\!\mid \\ N & \xrightarrow{\sim} & \boxed{\begin{array}{c}\theta^{-1}(N) \\ \| \\ aA\end{array}} \end{array}$$

θ

$N = \theta(aA)$

$= A(am_1)$

<u>Conclusion</u> : (m_1) base de M

(am_1) —— N

<u>ZOOM</u>

$\boxed{\text{lundi 19 octobre} \quad 10^h \text{ — } 11^h30}$