Ajout : taille doublée si $n = N$ Suppression : taille /2 si $n = N/4$

$$\phi_i = \begin{cases} 2n_i - N_i & \text{si } \alpha_i \geq \frac{1}{2} \\ N_i/2 - n_i & \text{si } 0 < \alpha_i \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Mq : $a_i = c_i + \phi_i - \phi_{i-1} \leq 3 \quad \forall i$

Dessin : T — potentiel 2 par él. — $\phi_i = 2(n_i - \frac{N_i}{2})$

cas $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$ — $N_i/2$ n_i

cas $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$ T — potentiel : 1 — $N_i/2$

On va vérifier que $a_i = c_i + \phi_i - \phi_{i-1} \leq 3 \quad \forall i$ $\forall$ opération.

Cas de l'ajout

Cas 1 $\alpha_{i-1}, \alpha_i \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas $c_i = 1$ (pas de recopie de tableau)

$\phi_i = \frac{N_i}{2} - n_i \quad \phi_{i-1} = \frac{N_{i-1}}{2} - n_{i-1}$ et on $n_i = n_{i-1} + 1 \quad N_i = N_{i-1}$

$a_i = 1 + (\frac{N_i}{2} - n_i) - (\frac{N_i}{2} - (n_i - 1)) = 1 - 1 = 0 \leq 3$ ✓

Cas 2 $\alpha_{i-1} < \frac{1}{2} \leq \alpha_i$ Dans ce cas $c_i = 1$ (pas de recopie de tableau)

$a_i = \dots = 0 \leq 3$ ✓

Cas 3 $\frac{1}{2} \leq \alpha_{i-1} < \alpha_i \leq 1$ Dans ce cas $c_i = 1$. (pas de recopie de tableau).

$\phi_i = 2n_i - N_i \quad \phi_{i-1} = 2n_{i-1} - N_{i-1} \quad n_i = n_{i-1} + 1 \quad N_i = N_{i-1}$

$a_i = 1 + (2n_i - N_i) - (2(n_i - 1) - N_i) = 1 - (-2) = 3 \leq 3$ ✓

Cas 4 $\alpha_{i-1} = 1$ (le tableau T est rempli). donc $n_{i-1} = N_{i-1}$

$\phi_{i-1} = 2n_{i-1} - n_{i-1} = n_{i-1}$ Recopie de tableau : $N_i = 2N_{i-1} \quad n_i = n_{i-1} + 1$.

$\phi_i = 2n_i - N_i = 2(n_{i-1} + 1) - 2n_{i-1} = 2$.

Et $c_i = n_{i-1} + 1$ (recopie du tableau à n_{i-1} é)+1 + nouvelle valeur).

On a : $a_i = (n_{i-1} + 1) + 2 - n_{i-1} = 3 \leq 3$ ✓

Cas de la suppression.

Exercice ☺

---

le $k^{ième}$ rang : le "$k^{ième}$ plus petit élément" d'un tableau T de n nombres.

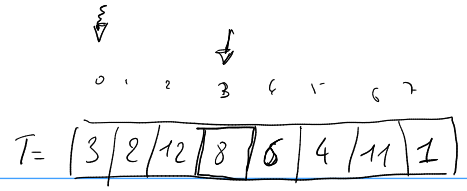
$k = 1 \rightsquigarrow$ min

$k = n \rightsquigarrow$ max

$k = n/2 \rightsquigarrow$ médiane.

On peut l'obtenir en triant le tableau et en renvoyant la $k^{ième}$ case $\rightsquigarrow O(n \log n)$.

Mais on veut + rapide



$T = |3|2|12|8|6|4|11|1|$ — 5ème rang (c'est 6 ici).

Si on choisit le pivot $i = 3$ le pivot est 8 :

$T_0 = |3|2|6|4|1|$ $T_1 = |12|11|$ — Comme $n_0 = 5$, le 5ième rang est à chercher dans T_0.

Appel rec $(T_0, 5)$.

Si on choisit le pivot $i = 0$ le pivot est 3

$T_0 = |2|1|$ $T_1 = |12|8|6|4|11|$ — Appel rec $(T_1, 2)$.

↑ on cherche le 2ème rang de T_1.

Analyse de QuickSelect :

C_n : nbre de comparaisons entre 2 valeurs de T sur un tableau de taille n.

On veut mq $\mathbb{E}[C_n] \leq 4n$.

Par récurrence sur n.

Si $n = 1$ ok (pas de comparaison à faire) $\mathbb{E}[C_n] = 0 \leq 4$

Pour n quelconque :

Par équation de récurrence $C_n \leq n$ (n−1 comparaisons avec le pivot) $+ C_t$ où t est la taille du tableau de l'appel récursif. ($t < n$)

Par hyp. de rec. on a : $\mathbb{E}[C_t] \leq n + 4t$

Que vaut t ?

On regarde le choix du pivot p.

Si $p = T^{(k)}$ $\rightsquigarrow t = 0$ on a trouvé !

Si $p = T^{(j)}$ avec $j > k$ on fait un appel rec sur T_0 les elts $< p$: il y en $j-1$.

$\rightsquigarrow t = j-1$.



Si $p = T^{(j)}$ avec $j < k$: on fait un appel rec. sur T_1. les elts $> p$: $n-j$

$\rightsquigarrow t = n-j$.

Dans tous les cas $t \leq \max\{n-j ; j-1\}$.

On fait le calcul de $\mathbb{E}[C_n]$ en conditionnant par le choix de p :

$$\mathbb{E}[C_n] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[C_n \mid p = T^{(j)}] \times \mathbb{P}[p = T^{(j)}]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} (n + 4\max\{n-j ; j-1\}) \times \frac{1}{n}$$

↑ car $p = T^{(j)}$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} 1 + \frac{4}{n} \sum_{j=1}^{n} \max\{n-j ; j-1\}$$

On a $j-1 > n-j$ si $2j > n-1$ si $j > \frac{n-1}{2}$.

$$\mathbb{E}[C(n)] \leq n + \frac{4}{n}\left(\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} j-1 + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} n-j\right).$$

$$\leq n + \frac{4}{n}\left[\left(n - \frac{n+1}{2} + 1\right)\left(\frac{n-1}{2} + n-1\right)/2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(n-1+\frac{n+1}{2}\right)/2\right]$$

$$\leq \dots \leq 4.$$

□