Feuille d'exercices 4

SUITES RÉCURRENTES

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Est-il vrai que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente associée donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 \in [0, 3[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$.

(a) Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Y représenter les premières valeurs de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$.
(b) Montrer que (u_n) est majorée et croissante. Qu'en déduit-on ?
(c) Déterminer la limite de (u_n).
(d) Que se passe-t-il si $u_0 \in [3, +\infty[$?

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4. (a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{4}$. En vous inspirant de l'exercice 3, déterminer la limite éventuelle de (u_n).
(b) Même question pour la suite (v_n) définie par $v_0 \in]0, +\infty[$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 5. Soient $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$ et (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in \left]0, \dfrac{3}{2}\right[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Y représenter les premières valeurs de la suite (u_n).
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in \left]0, \dfrac{3}{2}\right[$ et $u_{2n+1} \in \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.
(c) On pose $v_n = u_{2n}$. Montrer que (v_n) est une suite récurrente pour une fonction que l'on précisera. En déduire que la suite (v_n) est croissante.
(d) Montrer que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$. En déduire que $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$.
(e) Que se passe-t-il si $u_0 \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$?

Exercice 6. Soient $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2}$ et (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. En vous inspirant de l'exercice 5, étudier la suite (u_n). Que se passe-t-il si $u_0 \in [1, +\infty[$?

3 - Pour aller plus loin

Exercice 7. Soient $a,\ b,\ u_0$ trois réels fixés. On considère la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = au_n + b$.

(a) On suppose $a = 1$. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire le comportement de (u_n).

(b) On suppose maintenant $a \neq 1$. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \lambda$ soit géométrique. En déduire l'expression de (v_n) en fonction de n.

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$.

(d) En déduire le comportement de (u_n) en fonction des paramètres $a,\ b,\ u_0$.

Exercice 8. **(Difficile)** Soit $D \geq 2$ un entier (on peut faire l'exercice avec $D = 2$ ou $D = 10$). Soit $f : [0,1[\to\ [0,1[$ la fonction $f(x) = Dx - [Dx]$, où $[y]$ est la partie entière du réel y. Soient $a \in [0,1[$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite récurrente donnée par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer le graphe de f.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = D^n a - [D^n a]$.

(c) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$, alors (u_n) est périodique à partir d'un certain rang.

On définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall i \in \{0, 1, \dots, D-1\},\ d_n = d_n(a) = i$ si $u_n \in \left[\dfrac{i}{D}, \dfrac{i+1}{D}\right]$.

(d) Montrer que $\forall a \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_n(f(a)) = d_{n+1}(a)$.

(e) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{d_k}{D^k} - a\right| < \dfrac{1}{D^N}$.

(f) Montrer que si (u_n) est périodique de période p à partir du rang N_0, alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_0+np} \frac{d_k}{D^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{Q}$.

(On pourra regrouper dans la somme par paquets de p et identifier une suite géométrique.)

(g) Montrer que (u_n) est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.

(h) Pour $D = 10$, quelle propriété des développements décimaux connue depuis l'école primaire a-t-on démontrée au (d) ?