TD 6 : Structure fine des niveaux $2P$ de l'atome d'hydrogène en champ magnétique

Conventions. Unités gaussiennes ; $e < 0$ désigne la charge de l'électron. On note H_0 le hamiltonien de l'atome d'hydrogène du TD 4 et W_{so} le terme de couplage spin-orbite.

Partie I — Couplage spin-orbite

Dans l'atome d'hydrogène, le couplage spin-orbite provient de l'interaction entre le moment magnétique intrinsèque de l'électron, $\mathbf{M}_S = e\mathbf{S}/m_e c$, et le champ magnétique $\mathbf{B}$ apparaissant dans le référentiel propre de l'électron, en mouvement à la vitesse $\mathbf{v}$ dans le champ électrostatique du proton $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Ce champ est prédit par la relativité restreinte et vaut, au premier ordre en v/c, $\mathbf{B} = -\frac{1}{c}\,\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

1. Montrer, au facteur $\frac{1}{2}$ près (facteur de Thomas, d'origine cinématique), que le terme d'interaction spin-orbite se met sous la forme

$$W_{so} = \frac{e^2}{2m_e^2c^2}\,\frac{1}{R^3}\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}. \tag{1}$$

   Indications : écrire $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ créé par le proton en fonction de $\mathbf{r}$, puis exprimer $\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\mathcal{E}}$ en faisant apparaître $\mathbf{L} = \mathbf{r}\wedge\mathbf{P}$. Vérifier que le signe obtenu est bien positif, et dire ce que cela implique sur l'ordre des niveaux $j = 3/2$ et $j = 1/2$.

2. On note $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ le moment cinétique total de l'électron. Exprimer $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ en fonction de $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{L}^2$ et $\mathbf{S}^2$. En déduire qu'il convient d'utiliser une base d'états propres $|n, l, s = \frac{1}{2}, j, m_j\rangle$ communs à $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{J}^2$ et J_z pour traiter l'interaction spin-orbite. Pourquoi la base d'états propres communs à $\mathbf{L}^2$, L_z, $\mathbf{S}^2$, S_z est-elle moins commode ?

3. Calculer la correction à l'énergie des états $1s$, $2s$ et $2p$ due au couplage spin-orbite. On donne $\langle 1/R^3\rangle_{21} = 1/(24a_0^3)$. On discutera le cas $l = 0$ avec soin : que vaut $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$, et que vaut $\langle 1/R^3\rangle$? Évaluer numériquement l'écart $2p_{3/2} - 2p_{1/2}$ en eV.

Partie A — Le terme Zeeman : résultat admis

Le système est maintenant plongé dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$. L'énergie cinétique de l'électron devient $(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2/2m_e$, avec le potentiel vecteur $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\wedge\mathbf{r}$.

Résultat admis (démontré à l'exercice 9 bis) : au premier ordre en champ, il apparaît dans le hamiltonien le terme Zeeman orbital

$$H_z = -\frac{e}{2m_e c}\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}.$$

En y ajoutant l'interaction avec le moment magnétique de spin ($g_s \simeq 2$), le hamiltonien d'interaction magnétique total s'écrit

$$H_B = -\frac{eB_0}{2m_e c}(L_z + 2S_z) \qquad \text{(effet Zeeman } \textit{anormal}\text{)}.$$

Partie II — Effet Zeeman anormal des niveaux $2p$

On se place en **champ faible** : H_B est traité comme une perturbation vis-à-vis de $H_0 + W_{so}$. On cherche les décalages en énergie ΔE_B des niveaux $2p$ au premier ordre en champ.

4. Exprimer H_B en fonction de J_z et S_z uniquement.

5. H_B commute-t-il avec J_z ? En déduire quels états de la base $|j = l \pm \frac{1}{2}, m_j\rangle$ il peut coupler entre eux. H_B est-il *diagonal* dans cette base ? Justifier qu'au premier ordre en B_0, et en champ faible, seuls les éléments diagonaux interviennent malgré tout, et conclure que

$$\Delta E_B = -\frac{eB_0}{2m_e c} \langle J_z + S_z \rangle_{j=l\pm 1/2,\, m_j} .$$

6. À l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan rappelés ci-dessous, calculer $\langle S_z \rangle$ dans les états $|j = l \pm \frac{1}{2}, m_j\rangle$ et en déduire ΔE_B en fonction de m_j et l. Faire apparaître le facteur de Landé $g_J = 1 \pm \frac{1}{2l+1}$ et donner sa valeur pour $2p_{3/2}$ et $2p_{1/2}$.

7. Tracer le déplacement des niveaux $2p_{3/2}$ et $2p_{1/2}$ en fonction de B_0. Combien de sous-niveaux obtient-on au total ? Pourquoi l'effet est-il qualifié d'*anormal*, c'est-à-dire en quoi diffère-t-il de ce qu'on obtiendrait pour une particule sans spin ?

Données (coefficients de Clebsch-Gordan pour $s = \frac{1}{2}$). En notant $|m_l, \pm\rangle$ les états propres de L_z et S_z :

$$|j = l + \tfrac{1}{2}, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}\ |m_j - \tfrac{1}{2}, +\rangle + \sqrt{\frac{l - m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}\ |m_j + \tfrac{1}{2}, -\rangle,$$

$$|j = l - \tfrac{1}{2}, m_j\rangle = -\sqrt{\frac{l - m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}\ |m_j - \tfrac{1}{2}, +\rangle + \sqrt{\frac{l + m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}\ |m_j + \tfrac{1}{2}, -\rangle.$$

Exercice 9 bis (travail personnel)

a) **Démonstration du terme Zeeman.** Développer $(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2/2m_e$ avec $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$.

(i) Pour un champ $\mathbf{B}$ uniforme, montrer que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}$.

(ii) Montrer que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}$, et en déduire $H_z = -\frac{e}{2m_e c}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}$, si l'on ne considère que les termes linéaires en $\mathbf{A}$.

Formulaire. $\langle 1/R^3 \rangle_{nl} = \dfrac{1}{a_0^3 n^3\, l(l+\frac{1}{2})(l+1)}$; $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$; $\mu_B = |e|\hbar/2m_e c \simeq 5{,}79 \times 10^{-5}$ eV·T^{-1}.