HAX708X : séance du 13 octobre 2026

Cinq séances à rattraper :

→ d'ici les vacances de la Toussaint :

3 séances :

① Zoom d'aujourd'hui

② Zoom vendredi 16h30 – 18h 16 octobre

③ Zoom lundi 19 octobre 10h – 11h30

→ mercredi 14 octobre : 2 séances à Zoom.

→ Moodle : dates des CC

CC1 : mercredi 4 novembre, 15h – 16h30

CC2 : mercredi 9 décembre, 15h – 16h30

Modules sur un anneau

A un anneau commutatif.

Soit $\mathbb{F}$ un corps.

un module M sur A est défini par

Def : un espace vectoriel E sur $\mathbb{F}$ est donné par :

(a) groupe abélien $(E, +)$; $(M,+)$ gpe abélien

(b) multiplication externe $\mathbb{F} \times E \longrightarrow E$

$A \times M \to M$

$(a, m) \mapsto a \cdot m$

$(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

(c) les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

(ii) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

(iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = \lambda\mu \cdot x$

(iv) $1 \cdot x = x$

idem

$\forall x, y \in E, \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{F}$

Exemples.

① $M = A$

② $M = A^n$ est un A-module

$$\begin{cases} a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n) \\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \\ \qquad (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{cases}$$

③ Exemple important

$M = \mathbb{F}^n$ qui est muni d'une structure de $\underbrace{\mathbb{F}[X]}_{A}$-module : en fixant $u \in \mathrm{End}(\mathbb{F}^n)$ et en posant

$$\left.\begin{array}{l} P \in \mathbb{F}[X] \\ x \in \mathbb{F}^n \end{array}\right\} \boxed{P \cdot x = P(u)(x)}$$

DEF

si $\begin{cases} P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ P(u) = a_0 I + a_1 u + \dots + a_n u^n. \end{cases}$

Exemple $A = \mathbb{Z}$

Prop $\{\mathbb{Z}\text{-modules}\} = \{\text{groupes abéliens}\}$

- si M est un $\mathbb{Z}$-module alors M est un groupe abélien
- supposons que M est un groupe abélien (notation additive) :

produit externe : $\mathbb{Z} \times M \longrightarrow M$

$(n, x) \longmapsto n \cdot x$

$$n \cdot x = \begin{cases} \underbrace{x + \dots + x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{(-x) + \dots + (-x)}_{|n| \text{ fois}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

($\mathbb{Z}$-module)

Exemples : • $\mathbb{Z}^3$ groupe abélien

ou

$$M = \{ 5x + 10y - 24z = 0 \}$$

M est un sous groupe de $\mathbb{Z}^3$.

• $N \subset \mathbb{Z}^3$: $N = \{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 5x + 10y - 24z \text{ est divisible par } 15 \}$

$$\boxed{M \subset N \subset \mathbb{Z}^3}$$

Exemple : morphisme d'anneaux

$\varphi : A \longrightarrow B$

Alors B possède une structure de A-module :

① $(B, +)$ gpe abélien

② $A \times B \longrightarrow B$

$(a, b) \longmapsto a \cdot b \underset{\text{def}}{=} \varphi(a) b$

Exemple : I idéal de A

- A/I est un anneau donc un A/I-module.
- grâce à $\pi : A \longrightarrow A/I$, on peut voir A/I comme un A-module

Sous module : Soit M un A-module et $N \subseteq M$

Def N est un sous A-module de M si

(1) $N \subseteq M$ est un sous groupe abélien

(2) $\forall a \in A, \forall n \in N :$

$$a \cdot n \in N$$

Prop a N est un sous A-module de M, alors il possède une structure de A-module

Torsion d'un A-module

Soit M un A-module

Def $\forall m \in M$, $\operatorname{ann}_A(m) = \{a \in A, a \cdot m = 0\}$

Prop $\operatorname{ann}_A(m)$ est un idéal de A

Exemple : $\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{F}}(E) < \infty \\ E \text{ un espace vectoriel sur } \mathbb{F} \\ u \in \mathrm{End}(E) \end{array}\right.$

Def E_u est E muni de la structure de $\mathbb{F}[X]$-module :

$$\mathbb{F}[X] \times E \longrightarrow E$$
$$(P(X), x) \longmapsto P(u)(x).$$

$x \in E$

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{F}[X]}(x) = \{ P \in \mathbb{F}[X],\ P(u)(x) = 0 \}$$
$$= (\mu_x)$$

μ_x est un polynôme minimal "associé" à x

Réduction d'endomorphisme : $u \in \mathrm{End}(E)$

$$\{ P \in \mathbb{R}[X],\ P(u) = 0 \} = (\mu)$$
μ : polynôme minimal

(A est intègre)

Definition : La torsion du A-module M est $M_{tor} = \{ m \in M, \ ann_A(m) \neq 0 \}$

Prop M_{tor} est un sous A-module de M

(1) m et $m' \in M_{tor}$: $\exists a, b \in A$ tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $\begin{cases} a \cdot m = 0 \\ b \cdot m' = 0 \end{cases}$

Alors $ab \cdot (m + m') = b(a \cdot m) + a(b \cdot m') = 0$

Comme A est intègre $ab \neq 0$ et donc $m + m' \in M_{tor}$

(2) $m \in M_{tor}$: $\exists a \neq 0$ tq $a \cdot m = 0$

Alors $\forall a' \in A$, $a(a' \cdot m) = a'(a \cdot m) = 0$

donc $a' \cdot m \in M_{tor}$.

Exemple des groupes abéliens :

① si $(G, +)$ un groupe abélien fini

si $n = \text{card}(G)$, alors $\boxed{n \cdot x = 0 \quad \forall x \in G}$

Ici $\boxed{G_{tor} = G}$

② $G = \mathbb{Z}^n$: $(\mathbb{Z}^n)_{tor} = \{0\}$

Morphismes

M N deux A-modules et $f : M \to N$

Def f est un morphisme de A-module si

(1) f est un morphisme de gpes additifs

(2) $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

$\forall a \in A, \forall x \in M$

Rmq si $A = \mathbb{Z}$

| morphisme de $\mathbb{Z}$-module | $\equiv$ | morphisme de groupes |

Exemple : E un $\mathbb{F}$ espace vectoriel

$u, v \in End_{\mathbb{F}}(E)$

On a deux $\mathbb{F}[X]$-modules : E_u et E_v

Prop $f : E_u \longrightarrow E_v$ est un morphisme de $\mathbb{F}[X]$-modules ssi et seulement si

(1) $f : E \longrightarrow E$ application linéaire

(2) $f \circ u = v \circ f$

Rmq : si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de A-modules

si B est un sous anneau de A, alors M et N sont des B-modules et $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de B-modules

Retour à la preuve : $B = \mathbb{F} \subseteq A = \mathbb{F}[X]$

alors $f : E \to E$ est un morphisme de $\mathbb{F}$-modules

c'est à dire f est une application linéaire

Point (2) : $\forall x \in \Pi$, $\forall P \in \mathbb{F}[X]$

$$f(P \cdot x) = P \cdot f(x)$$

dans E_M ↑ dans E_N

$P = X$

$$f \circ u(x) = v \circ f(x) \quad \forall x \in M$$

Condition nécessaire : $f \circ u = v \circ f$ (⊛)

Supposons que (⊛) est vrai.

On veut $f(P \cdot x) = P \cdot f(x)$

$\forall P \in \mathbb{F}[X]$

Comme f est linéaire, il suffit de vérifier que

$$f(X^\ell \cdot x) = X^\ell \cdot f(x)$$

$\forall \ell \in \mathbb{N}$

$\forall x \in E$

$$X^\ell \cdot x = u^\ell(x)$$

$$X^\ell \cdot f(x) = v^\ell(f(x))$$

On doit vérifier que

$$f \circ u^\ell = v^\ell \circ f \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

Preuve par récurrence sur $l \geq 0$

$l = 0$ $\quad f \circ Id = Id \circ f$ (OK)

$l = 1$ $\quad f \circ u = v \circ f$ (OK)

"l" $\Rightarrow$ "$l+1$" :

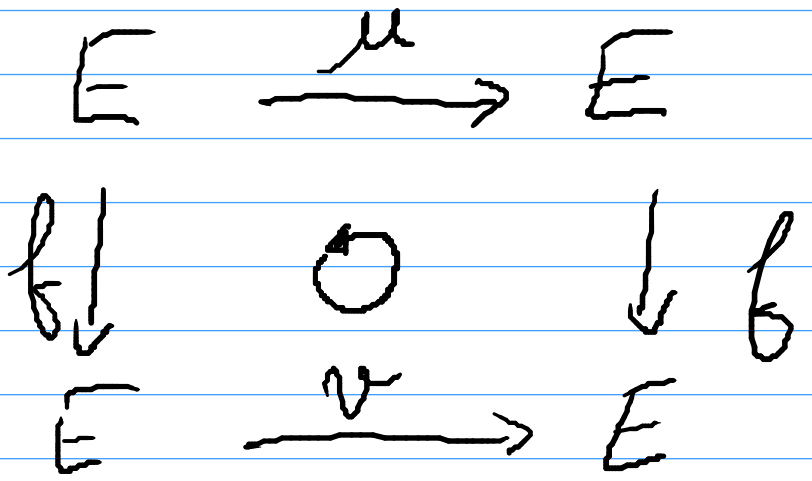
$$f \circ u^{l+1} = f \circ u^l \circ u$$

$$= v^l \circ f \circ u \quad \text{(hyp. "l")}$$

$$= v^l \circ v \circ f \quad \text{(hyp. "1")}$$

$$= v^{l+1} \circ f .$$

Dessin



"diagramme commutatif" $\boxed{v \circ f = f \circ u}$

Notation : $E_u = E$ comme H-espace vectoriel

Demain $\boxed{\text{Zoom de } 13^h15 \text{ à } 16^h30}$