HLMA304, Arithmétique
Examen, Première session, janvier 2018

— Durée : 2h —
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'examen.

Les exercices pourront être traités dans n'importe quel ordre. On pourra admettre le résultat d'une question pour aborder les suivantes.

Exercice 1. *(Cours)* Énoncer le petit théorème de Fermat.

Exercice 2.

(1) Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$6a - 11b = 6$$

(2) Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$6a - 12b = 5$$

Exercice 3. Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. On suppose que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(c, d) = 1$ et que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

est entier. Montrer que $b = d$.

Exercice 4. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$7|(3^{2n+1} + 2^{n+2})$$

Exercice 5.

(1) Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

(2) Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 \equiv 0$ [8] ou $x^2 \equiv 4$ [8].

(3) Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.

(4) En déduire que les nombres $a^2 + b^2 + c^2$ et $2(ab + bc + ca)$ ne sont pas des carrés ; puis que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré non plus.

Exercice 6.

Une vieille fermière s'en allant au marché voit ses œufs écrasés par un cheval. Le cavalier voulant la rembourser lui demande combien d'œufs elle avait. Tout ce dont elle se souvient est qu'en les rangeant par 2, il en restait un, et de même en les rangeant par 3, 4, 5 ou 6 ; toutefois, en les rangeant par 7, il n'en restait pas. Combien d'œufs, au moins, avait-elle ?

Exercice 7. Un code de sécurité sociale est formé de 13 chiffres (entre 0 et 9) suivis d'une clef de deux chiffres. Si N est l'entier formé par les 13 chiffres et c la clef, la contrainte de vérification est la relation

$$N + c \equiv 0 \ [97]$$

Par exemple, la clé du numéro $N = 2\ 43\ 07\ 35\ 231\ 584$ est $c = 78$ (un calcul montre que $N = 97 \times 25059126098 + 78$).

(1) Montrer que 97 est un nombre premier.

(2) Montrer que toutes les nombres 10^k sont inversibles dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$.

(3) On considère un numéro de sécurité sociale dont un connait tous les chiffres sauf un, qui est illisible (on connait seulement sa position). Montrer que la clé permet de retrouver le chiffre manquant.

(4) Montrer, en revanche, que si deux chiffres successifs sont illisibles, ils ne peuvent pas toujours être retrouvés.