UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L1 - ANALYSE 2 (HLMA202)

ANNÉE 2017-2018

Feuille d'exercices 3

OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Trouver les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+n+1}$,

(b) $v_n = \dfrac{4-n+3n^2}{7-n^2-n^4}$,

(c) $w_n = \dfrac{n^{19}+2}{n^{17}-2n^{19}}$,

(d) $x_n = \dfrac{(2^n+1)(3^n-1)}{6^n-4}$,

(e) $y_n = \dfrac{(6^n+1)((\frac{1}{2})^n+1)}{3^n}$,

(f) $z_n = (2^n-3^n)(n^2-6)$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et λ un réel. Montrer que si $\lambda > 0$, alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et si $\lambda < 0$, alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Si $\lambda = 0$, la suite (λu_n) admet-elle une limite ?

Exercice 3. Trouver les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{e^n}{n\ln(n)}$,

(b) $v_n = n^{\frac{1}{n}}$,

(c) $w_n = (\ln(n))^{\frac{1}{n}}$,

(d) $x_n = \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$,

(e) $y_n = \ln(n+1) - \ln(n)$,

(f) $z_n = n\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 4. Soit (u_n) une suite bornée. Montrer que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5. Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$. Montrer que si (u_n) tend vers $-\infty$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6. On considère une suite (u_n). Est-il vrai que...

(a) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

(b) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

(c) si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors (u_n) est convergente ?

(d) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors (u_n) est convergente ?

(e) si $u_n > 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

(f) si $u_n > 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $(u_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point adhérent à D, et soient ℓ et ℓ' deux réels.

(a) Rappeler la définition de « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 ».

(b) Démontrer rigoureusement que si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell'$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.