

Outils mathématiques 1 — TD 1 : Géométrie dans le plan

Remarque : certains de ces énoncés pourront faire l'objet d'exercices supplémentaires (non corrigés en TD).

1. Outils vectoriels du plan

On considère les points $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; -1)$ et $D(1; -3)$.

1.1 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$.

1.2 Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD}$.

1.3 Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ sont-ils orthogonaux ?

$$1.1 \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$1.2 \quad \vec{u} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC} + \vec{CD} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

$$1.3 \quad \Delta = \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0 \quad \vec{AB} \perp \vec{AD}$$

Le triangle ABD est rectangle en A.

$$\vec{BC} \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times (-3) + (-5) \times (-2) = 4 \neq 0$$

$\vec{BC}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas orthogonaux.

1.4 Calculer les normes des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AC}$.

1.5 Calculer le produit scalaire $s = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$ et en déduire au signe près la valeur de l'angle $\theta = (\vec{AC}, \vec{AD})$.

1.6 Déterminer le signe de θ ainsi que la surface du triangle ACD à l'aide du déterminant.

$$1.4 \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AD}\| = AD = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = AC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$1.5 \quad \vec{AD} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 18 + 8 = 26 \text{ uL}^2$$

$$\Delta = 26 = \|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos \theta = 5 \times 2\sqrt{10} \times \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{26}{5 \times 2\sqrt{10}} \approx 0,822$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \arccos(0,822) \\ = \pm 34,7^\circ$$

$$1.6 \quad \begin{array}{c} D \\ \nearrow \theta \\ A \quad \rightarrow C \end{array} \quad \det(\vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 6 \times (-4) - (-2) \times 3 \\ = -18$$

$$\Rightarrow \theta = -34,7^\circ \quad \text{et} \quad \text{ct}_{ACD} = \frac{1}{2} |-18| = 9 \text{ uL}^2 = \text{ct}$$

Q sup.) $\mathcal{A}_{BCD}$? $\alpha = (\widehat{\vec{BC}, \vec{CD}})$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{BC}; \vec{CD}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -19 \Rightarrow \mathcal{A}_{BCD} = \frac{19}{2} = 9,5 \text{ u}^2$$

$\alpha < 0$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{BC} \cdot \vec{CD}}{\|\vec{BC}\| \cdot \|\vec{CD}\|} = \frac{4}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = 0,206$$

$$\theta = -\arccos(0,206) = -1,36 = \underline{\underline{-78,1^\circ = \alpha}}$$

2. Droites et cercles du plan

2.1 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $y = -5x + 8$.

2.2 Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite D d'équation $2x + 3y + 2 = 0$.

2.3 Soit D la droite d'équation $y = 2x - 1$ dans le plan muni d'un repère orthonormé :

(a) donner un vecteur directeur et un vecteur normal de D ;

(b) indiquer, parmi ces droites, laquelle est perpendiculaire à D :

(i) $y = -2x - 1$ (ii) $y = -0,5x + 1$ (iii) $y = 2x + 1$.

2.1 et 2.2 lecture droites

2.1 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 - $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.3 (a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$

$$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$$

$$\Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

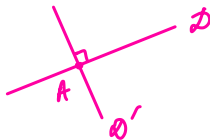
$$D: y = mx + p$$

$$D': y = m'x + p'$$

$$D \perp D' \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Q sup: Point d'intersection $D: y = 2x - 1$
et $D': y = -0,5x + 1$.

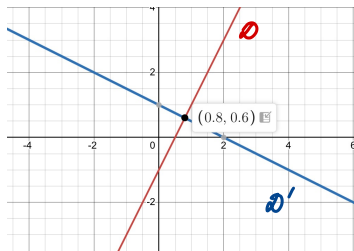
Soit $A \in D \cap D'$



$$A \in D \Rightarrow A(x; y) \mid y = 2x - 1$$

$$A \in D' \Rightarrow A(x; y) \mid y = -0.5x + 1$$

$A(x; y)$ est la solution du système
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -0.5x + 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 4y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$5y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$2x = y + 1 = 1.6 \Rightarrow x = \frac{1.6}{2} = 0.8$$

2.4 Donner l'équation cartésienne de la droite passant par $H(-2; 1)$ et perpendiculaire à la droite d'équation : $x - 2y = 5$.

$$D: x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$D' \perp D \quad H \in D' \quad D'$ est dirigée par $\vec{n}$

$$D' = \{ M(x; y) \mid \vec{HM} \parallel \vec{n} \}$$

$$\vec{HM} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HM} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \det(\vec{HM}; \vec{n}) = 0 = \begin{vmatrix} x + 2 & 1 \\ y - 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x - 4 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x - y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 3$$

2.5 Donner l'équation de la droite passant par $G(2; -3)$ et parallèle à la droite d'équation : $y = -2x + 3$.

Droites parallèles : même coefficient directeur

$$\Rightarrow y = -2x + p$$

$$G \in D \Rightarrow -3 = -2 \times 2 + p \Rightarrow p = 1 \Rightarrow D: y = -2x + 1.$$

2.6 Déterminer les intersections deux à deux des droites suivantes :

- D_1 d'équation : $2x + y - 3 = 0$
- D_2 passant par $A(0;3)$ et $B(3;5)$
- D_3 d'équation : $4x - y = 6$

Soit $I_{ij} = D_i \cap D_j$

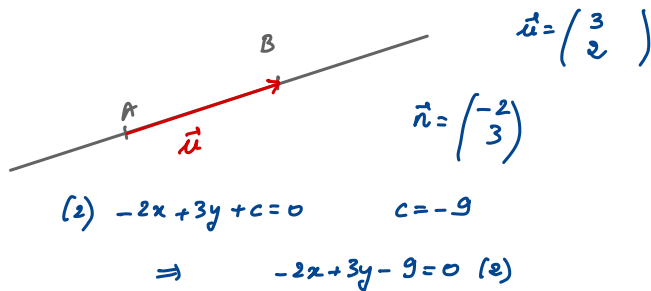
• $I_{12} \in D_1$ et $I_{12} \in D_2$

$$\Leftrightarrow I_{12}(x;y) / \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ 4x - y - 6 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \rightarrow 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \rightarrow y = 4x - 6 = 4 \times \frac{3}{2} - 6 = 0 \Rightarrow I_{12}\left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

• Wanted: Eq (2) de D_2 .



$$\bullet I_{12}: \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & (1) \\ -2x + 3y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \rightarrow 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow I_{12}(0; 3)$$

$$\rightarrow (1) \quad 2x + 3 - 3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\bullet I_{23}: \begin{cases} -2x + 3y - 9 = 0 & (2) \\ 4x - y - 6 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow y = 4x - 6$$

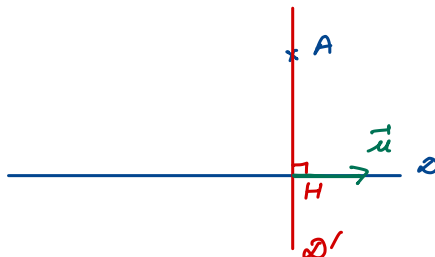
$$\rightarrow (2) \rightarrow -2x + 12x - 18 - 9 = 0 \Rightarrow 10x = 27 \Rightarrow x = 2,7$$

$$\rightarrow (2) \quad -5,4 + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 3y = 14,4 \Rightarrow y = 4,8$$

$$\Rightarrow I_{23}(2,7; 4,8)$$

2.7 Déterminer la projection orthogonale de $A(5; -2)$ sur la droite D d'équation $y = -3x + 4$.

Soit H cette projection.



1) Donner une équation D'

2) $H = D \cap D'$

1) $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u} = (1; -3)$

$$\mathcal{D}' = \{M(x; y) / \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0\} \text{ avec } \vec{AM} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0 = x - 5 - 3y - 6 \Rightarrow \mathcal{D}': x - 3y - 11 = 0$$

$$2) H = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}': H(x; y): \begin{cases} y = -3x + 4 & (1) \\ x - 3y - 11 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad x - 3(-3x + 4) - 11 = 0 \Leftrightarrow x + 9x - 12 - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x = 23 \Rightarrow x = 2,3$$

$$\rightarrow (1) \quad y = -3 \times 2,3 + 4 = -2,9 \quad \rightarrow H(2,3; -2,9)$$

2.8 Donner une mesure de l'angle θ entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, où $\mathcal{D}_1 = \{M(x; y) / y = 3x + 2\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{M(x; y) / x - 4y + 12 = 0\}$.

