

Outils mathématiques 1 — TD 9 : primitives et intégrales #2
Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Chaque partie porte un renvoi [TD 9 — ex. n] vers la feuille de TD correspondante. **Intégration par parties : 14 exercices. Changement de variable : 13 exercices.**

Boîte à outils.

- **Intégration par parties :** $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$ On dérive v , on primitive u' : le but est que $\int uv'$ soit *plus simple*.
- **Comment choisir v (à dériver) :** par ordre de priorité (A.L.P.E.S) $\arctan, \arcsin \rightarrow \ln \rightarrow$ polynôme $\rightarrow \exp \rightarrow \sin, \cos$. On dérive ce qui est *à gauche* de cette liste. Cas particuliers : $\int \ln x$ (poser $v = \ln x, u' = 1$) ; $\int e^{ax} \cos(bx)$ (deux IPP, puis on résout en I).
- **Changement de variable :** si $x = \varphi(t)$, alors $dx = \varphi'(t) dt$ — et l'on **change aussi les bornes**. Réciproquement, si $u = \varphi(x)$, on cherche à faire apparaître $\varphi'(x) dx = du$.
- **Changements réflexes :** $\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin t$; $\sqrt{x} \rightarrow u = \sqrt{x}$ (alors $x = u^2, dx = 2u du$) ; $e^x \rightarrow u = e^x$; fraction en sin et cos $\rightarrow t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, avec $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$
- **Valeur moyenne et valeur efficace** d'un signal T -périodique : $\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ et $S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}.$

Partie 1 — Intégration par parties : 14 exercices [TD 9 — ex. 2, 3 et 4]

Calculer les intégrales suivantes, ou déterminer les primitives demandées. Dans chaque cas, préciser le choix de u' et de v .

1) $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$

2) $I_2 = \int_1^e x \ln x dx$

3) $I_3 = \int_0^\pi x \sin x dx$

4) $I_4 = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

5) $I_5 = \int_1^e \ln x dx$ (astuce : $u' = 1$)

6) $I_6 = \int_0^1 \arctan x dx$

7) $I_7 = \int_0^{1/2} \arcsin x dx$

8) $I_8 = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ (deux IPP)

9) $I_9 = \int_0^\pi e^x \cos x dx$ (résoudre en I_9)

10) $I_{10} = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

11) $I_{11} = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

12) $I_{12} = \int_0^1 (x+1) e^{2x} dx$

13) $I_{13} = \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

14) Primitive de $f(x) = x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$

15. (Récurrence.) On pose $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

(a) Calculer J_0 .

(b) Par une intégration par parties, montrer que $J_n = e - n J_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

(c) En déduire J_1, J_2 et J_3 . Comparer J_1 avec I_1 et J_2 avec I_8 (attention au signe de l'exposant!).

Partie 2 — Changements de variable : 13 exercices [TD 9 — ex. 1 et 5]

- 16) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ ($u = x^2 + 1$) 17) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$ ($u = \cos x$)
- 18) $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ($u = \sqrt{x}$) 19) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ($x = \sin t$)
- 20) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+8}$ ($u = x+2$) 21) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ ($u = \ln x$)
- 22) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ ($u = e^x$) 23) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ ($u = e^x$)
- 24) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$ ($t = \tan \frac{x}{2}$) 25) $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$ ($u = x+1$)
- 26) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ ($x = 2 \sin t$) 27) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ ($u = \sin x$)
- 28) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ (intégrale impropre)

29. [TD 9 — ex. 1] Déterminer les primitives de $f(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, puis celles de $g(x) = \frac{1}{\tan x}$ sur $]0; \pi[$. Une seule idée sert dans les deux cas : laquelle ?

Partie 3 — Synthèse : valeurs moyennes, valeurs efficaces, énergie [TD 9 — ex. 6]

30. **Signal sinusoïdal.** Soit $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- (a) Calculer $\langle s \rangle$ sur une période. Le résultat dépend-il de φ ?
 - (b) Calculer $\langle s^2 \rangle$, puis la valeur efficace S_{eff} . Indication : linéariser $\sin^2$.
 - (c) Retrouve-t-on le fameux « 230 V » du secteur, sachant que l'amplitude vaut environ 325 V ?
31. **Signal en dents de scie.** $u(t) = U_0 \frac{t}{T}$ sur $[0; T[$, prolongé par T -périodicité.
- (a) Tracer u sur $[0; 3T]$.
 - (b) Calculer $\langle u \rangle$ et U_{eff} .
 - (c) En déduire le facteur de forme $F = \frac{U_{\text{eff}}}{\langle u \rangle}$.
32. **Comparaison.** Rassembler dans un tableau $\langle u \rangle$, U_{eff} et F pour : le sinus, le sinus redressé double alternance ($A|\sin \omega t|$), et la dent de scie. Lequel de ces trois signaux est le plus « régulier » ?
33. **Puissance et théorème de superposition.** Un signal composite s'écrit $u(t) = U_{\text{dc}} + A \cos(\omega t)$: une composante continue plus une ondulation.
- (a) Calculer $\langle u \rangle$.
 - (b) Montrer que $\langle u^2 \rangle = U_{\text{dc}}^2 + \frac{A^2}{2}$, c'est-à-dire $U_{\text{eff}} = \sqrt{U_{\text{dc}}^2 + \left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2}$. Le terme croisé disparaît : pourquoi ?
 - (c) Énoncer le résultat en une phrase : que fait-on des valeurs efficaces de composantes de fréquences différentes ? Et de leurs puissances ?
 - (d) Application numérique. Une alimentation délivre $U_{\text{dc}} = 12 \text{ V}$ avec une ondulation résiduelle d'amplitude $A = 0,50 \text{ V}$. Calculer U_{eff} et la puissance dissipée dans une résistance $R = 100 \Omega$, sachant que $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$. Quelle fraction de la puissance est due à l'ondulation ?

Corrigé express — résultats seuls

La constante d'intégration est sous-entendue pour les primitives.

- Partie 1 — IPP.** 1) $\left[(x-1)e^x\right]_0^1 = \boxed{1}$. 2) $\left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4} \approx 2,097$. 3) $\left[-x \cos x + \sin x\right]_0^\pi = \boxed{\pi}$. 4) $\left[x \sin x + \cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$. 5) $\left[x \ln x - x\right]_1^e = \boxed{1}$. 6) $\left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0,439$. 7) $\left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \approx 0,128$. 8) $\left[2 - \frac{5}{e}\right] \approx 0,161$. 9) Deux IPP donnent $I_9 = \left[e^x \sin x\right]_0^\pi + \left[e^x \cos x\right]_0^\pi - I_9$, d'où $2I_9 = -e^\pi - 1$ et $I_9 = -\frac{e^\pi+1}{2} \approx -12,07$. C'est le cas « on résout en I » : après deux IPP on retombe sur l'intégrale de départ ; on la traite comme une inconnue. 10) $\left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x\right]_1^e = \boxed{e-2} \approx 0,718$. 11) $\left[x \tan x\right]_0^{\pi/4} + \left[\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \approx 0,439$ (même valeur que I_6 : coïncidence amusante). 12) $\left[\frac{3e^2-1}{4}\right] \approx 5,292$. 13) $\left[\frac{e^{\pi/2}+1}{2}\right] \approx 2,905$. 14) $\left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right]$.
15. (a) $J_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$. (b) Avec $v = x^n$ et $u' = e^x$: $J_n = \left[x^n e^x\right]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n J_{n-1}$. (c) $J_1 = e - J_0 = e - (e - 1) = \boxed{1}$ (on retrouve I_1) ; $J_2 = e - 2J_1 = \boxed{e-2} \approx 0,718$; $J_3 = e - 3J_2 = \boxed{6-2e} \approx 0,563$. $J_2 = e - 2$ n'est pas $I_8 = 2 - \frac{5}{e}$: dans I_8 l'exponentielle est e^{-x} . La relation de récurrence dépend du signe de l'exposant.

- Partie 2 — changements de variable.** 16) $\frac{1}{2} \left[\ln u\right]_1^2 = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,347$. 17) $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$: $-\int_1^0 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$. 18) $x = u^2$, $dx = 2u du$, bornes $1 \rightarrow 2$: $\int_1^2 \frac{2u}{1+u} du = 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = \boxed{2 + 2 \ln \frac{2}{3}} \approx 1,189$. 19) $x = \sin t$, bornes $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$: $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$ (c'est l'aire du quart de disque unité — vérification géométrique immédiate). 20) $x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4$: $\frac{1}{2} \left[\arctan \frac{x+2}{2}\right]_0^2 = \frac{\arctan 2}{2} - \frac{\pi}{8} \approx 0,161$. 21) $u = \ln x$, bornes $1 \rightarrow 2$: $\int_1^2 \frac{du}{u} = \boxed{\ln 2} \approx 0,693$. 22) $u = e^x$, bornes $1 \rightarrow 2$: $\int_1^2 \frac{du}{1+u^2} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \approx 0,322$. 23) $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$, d'où $\left[x - \ln(1+e^x)\right]_0^1 = \boxed{1 + \ln \frac{2}{1+e}} \approx 0,380$. 24) Avec $t = \tan \frac{x}{2}$, bornes $0 \rightarrow 1$: $\int_0^1 \frac{2 dt}{(1+t)^2} = \boxed{1}$. 25) $u = x+1$, bornes $1 \rightarrow 4$: $\int_1^4 (u-1) \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2}\right]_1^4 = \frac{116}{15} \approx 7,733$. 26) $\left[\arcsin \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$. 27) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$; avec $u = \sin x$ (bornes $0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$) : $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \boxed{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 1,317$. 28) $\left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ (l'intégrale converge). 29. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{u'}{u}$ avec $u = \cos x$: $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$. De même $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'}{u}$ avec $u = \sin x$: $\int \frac{dx}{\tan x} = \ln|\sin x|$. L'unique idée : reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$. Ce n'est même pas un changement de variable — c'est une forme usuelle déguisée.

- Partie 3 — synthèse.** 30. (a) $\langle s \rangle = \boxed{0}$, indépendamment de φ : sur une période complète, les alternances positives et négatives se compensent exactement. (b) $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, dont la valeur moyenne est $\frac{1}{2}$: $\langle s^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$ et $S_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$. (c) $\frac{325}{\sqrt{2}} \approx 230$ V : oui. Le « 230 V » du secteur est une valeur **efficace** ; la tension crête vaut bien 325 V.
31. (b) $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \frac{t}{T} dt = \frac{U_0}{2}$; $\langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \frac{t^2}{T^2} dt = \frac{U_0^2}{3}$, d'où $U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \approx 0,577 U_0$. (c) $F = \frac{U_0/\sqrt{3}}{U_0/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155$.
- 32.

Signal	$\langle u \rangle$	U_{eff}	$F = U_{\text{eff}}/\langle u \rangle$
Sinus	0	$\frac{A}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A$	— (indéfini)
Sinus redressé $ \sin $	$\frac{2A}{\pi} \approx 0,637 A$	$\frac{A}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$
Dent de scie	$\frac{U_0}{2}$	$\frac{U_0}{\sqrt{3}} \approx 0,577 U_0$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$

Le **sinus redressé** est le plus régulier (F le plus proche de 1) : sa valeur instantanée s'écarte moins de sa moyenne. Pour le sinus pur, F n'a pas de sens : sa valeur moyenne est nulle. C'est d'ailleurs pourquoi on redresse avant de filtrer.

33. (a) $\langle u \rangle = U_{\text{dc}}$ (la moyenne du cosinus est nulle). (b) $u^2 = U_{\text{dc}}^2 + 2U_{\text{dc}}A \cos(\omega t) + A^2 \cos^2(\omega t)$. Le terme croisé $2U_{\text{dc}}A \cos(\omega t)$ a une valeur moyenne **nulle** sur une période ; il reste $\langle u^2 \rangle = U_{\text{dc}}^2 + \frac{A^2}{2}$. (c) Les valeurs efficaces de composantes de fréquences différentes ne s'additionnent pas : ce sont leurs **carrés** qui s'additionnent (somme quadratique) — autrement dit, ce sont les **puissances** qui s'additionnent. C'est exactement l'analogie du théorème de Pythagore : $\cos(\omega t)$ et la constante sont « orthogonaux » en moyenne. (d) $U_{\text{eff}} = \sqrt{12^2 + \frac{0,5^2}{2}} = \sqrt{144 + 0,125} \approx 12,005 \text{ V}$. $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{144,125}{100} = 1,441 \text{ W}$, dont $\frac{0,125}{100} = 1,25 \text{ mW}$ dus à l'ondulation, soit $\frac{0,125}{144,125} \approx 0,087 \%$ de la puissance totale. Une ondulation de 4 % en amplitude ne coûte qu'un millième de la puissance : les petites perturbations sont **quadratiquement** négligeables. C'est le même argument qui justifie qu'on néglige les termes du second ordre en calcul d'incertitudes.