

Outils mathématiques 1 — TD 8 : primitives et intégrales #1

Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Chaque partie porte un renvoi [TD 8 — partie n] vers la feuille de TD correspondante. **Formes usuelles : 18 exercices. Fractions rationnelles : 12 exercices.**

Boîte à outils — reconnaître la forme, pas calculer. Devant $\int f$, on cherche *d'abord* si f a la forme $u' \times$ (quelque chose en u) :

$$\begin{array}{lll} \int u' u^n = \frac{u'^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) & \int \frac{u'}{u} = \ln |u| & \int u' e^u = e^u \\ \int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} & \int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u} & \int u' \cos u = \sin u \\ \int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u & \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u & \int \frac{u'}{\cos^2 u} = \tan u \end{array}$$

• **Le réflexe** : repérer un candidat u , calculer u' , et voir s'il est *déjà là* (à une constante multiplicative près — qu'on peut toujours ajuster).

• **Fraction rationnelle** $\frac{P}{Q}$: si $\deg P \geq \deg Q$, faire **d'abord la division euclidienne**. Puis décomposer en éléments simples : $\frac{A}{(x-a)^k}$ (1^{re} espèce) et $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ avec $\Delta < 0$ (2^e espèce).

• **Trinôme sans racine réelle** : le mettre sous *forme canonique* $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + \beta^2$, puis $\int \frac{dx}{(x+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$.

• Pour $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$: faire *apparaître la dérivée du dénominateur* au numérateur, ce qui donne un $\ln$, et il reste un $\arctan$.

• **Aire entre deux courbes** sur $[a; b]$: $\mathcal{A} = \int_a^b (f_{\text{haut}} - f_{\text{bas}}) dx$. *Toujours déterminer les abscisses d'intersection d'abord.*

Partie 1 — Aires et primitives sous condition

- Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{5}{2} - x$.
 - Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g .
 - Sur cet intervalle, laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre ? *Justifier par un tableau de signes, ne pas se fier au dessin.*
 - Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.
- Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - \frac{4}{x^3}$ (sur $]0; +\infty[$) telle que $F(1) = 2$.
- Déterminer la primitive G de $g(t) = 4 \sin(2t)$ telle que $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.
- (Interprétation physique.) Un mobile a pour vitesse $v(t) = 3t^2 - 6t$ ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$), et se trouve en $x = 2$ m à $t = 0$.
 - Déterminer sa position $x(t)$.
 - Calculer le *déplacement* $x(3) - x(0)$, puis la *distance parcourue* $\int_0^3 |v(t)| dt$. Pourquoi ces deux nombres diffèrent-ils ?

Partie 2 — Formes usuelles : 18 primitives

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes. Dans chaque cas, identifier explicitement le u choisi.

$$1) f(x) = 2x^3 - 5x + 4 \quad 2) f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad 3) f(x) = 2\cos x + 3\sin x$$

$$4) f(x) = \frac{1}{x^3} - x^3 \quad 5) f(x) = 1 + \tan^2 x \quad 6) f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$7) f(x) = (2x + 1)^4 \quad 8) f(x) = \cos x \sin^3 x \quad 9) f(x) = x(x^2 - 3)^3$$

$$10) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x} \quad 11) f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad 12) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$13) f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad 14) f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5} \quad 15) f(x) = x e^{-x^2}$$

$$16) f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad 17) f(x) = \frac{3}{1 + 9x^2} \quad 18) f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

Partie 3 — Polynômes

- Effectuer la division euclidienne, puis, lorsque le reste est nul, donner toutes les racines de P .
 - $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ par $x - 1$
 - $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ par $x - 2$ (chercher ensuite les racines dans $\mathbb{C}$)
 - $P(x) = x^3 - ix^2 + x - i$ par $x - i$ (dans $\mathbb{C}$; lien avec le TD 4)
 - $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 3$ par $Q(x) = x^2 - x + 1$
- Montrer que $P(x) = x^3 - 3x + 2$ admet 1 pour racine double. Méthode : vérifier $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. En déduire la factorisation complète et la troisième racine.
- Trouver toutes les racines de $P(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$, sachant qu'il admet une **racine triple**. Indication : factoriser d'abord par x , puis reconnaître une identité remarquable.

Partie 4 — Fractions rationnelles

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$, puis en déduire une primitive.

$$19) \frac{1}{(x-2)(x+3)} \quad 20) \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} \quad 21) \frac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}$$

$$22) \frac{x^2+3}{(x-1)^2(x+2)} \quad 23) \frac{x}{(x+1)(2x^2+1)} \quad 24) \frac{1}{x(x^2+4)}$$

$$25) \frac{1}{x^2(x+1)} \quad 26) \frac{1}{x^2+2x+5} \quad 27) \frac{3x+1}{x^2+2x+5}$$

$$28) \frac{1}{x^2-4} \quad 29) \frac{1}{(x+3)^4} \quad 30) \frac{x^2}{x^2+1}$$

Trois de ces douze ne demandent **aucune** décomposition : les repérer avant de se lancer. Pour 21) et 30), vous devez commencer impérativement par la division euclidienne ; pourquoi ?

Corrigé express — résultats seuls

La constante d'intégration C est sous-entendue partout.

Partie 1. 1. (a) $\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2$. (b) En $x = 1$: $g(1) = \frac{3}{2}$ et $f(1) = 1$: la droite est au-dessus sur $[\frac{1}{2}; 2]$. (c) $\mathcal{A} = \int_{1/2}^2 \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2} - \ln x\right]_{1/2}^2 = \frac{15}{8} - 2 \ln 2 \approx 0,489$.

2. $F(x) = x^3 + \frac{2}{x^2} + C$; $F(1) = 3 + C = 2$ donne $C = -1$: $F(x) = x^3 + \frac{2}{x^2} - 1$.

3. $G(t) = -2 \cos(2t) + C$; $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{2} + C = C = 3$: $G(t) = 3 - 2 \cos(2t)$.

4. (a) $x(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. (b) Déplacement : $x(3) - x(0) = 2 - 2 = 0$ (le mobile est revenu à son point de départ). Distance : $v(t) = 3t(t - 2)$ est ≤ 0 sur $[0; 2]$ et ≥ 0 sur $[2; 3]$, donc $\int_0^3 |v| = -\int_0^2 v + \int_2^3 v = 4 + 4 = 8$ m. Le déplacement est une intégrale **algébrique** (les allers et retours se compensent); la distance parcourue intègre $|v|$. C'est exactement la différence entre « bilan » et « consommation ».

Partie 2 — formes usuelles. 1) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 4x$. 2) $2x^{3/2} - 4\sqrt{x}$. 3) $2 \sin x - 3 \cos x$. 4) $-\frac{1}{2x^2} - \frac{x^4}{4}$. 5) $\tan x$ (car $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$). 6) $-\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. 7) $\frac{(2x+1)^5}{10}$ ($u = 2x + 1$). 8) $\frac{\sin^4 x}{4}$ ($u = \sin x$). 9) $\frac{(x^2-3)^4}{8}$ ($u = x^2 - 3, u' = 2x$). 10) $[-e^{1/x}]$ ($u = \frac{1}{x}, u' = -\frac{1}{x^2}$: le signe $-$ est déjà là). 11) $\frac{(\ln x)^3}{3}$ ($u = \ln x$). 12) $\sqrt{x^2 + 4}$ (forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ à un facteur près). 13) $\ln(1 + e^x)$ (forme $\frac{u'}{u}$). 14) $\ln|x^2 - 3x + 5|$ (le numérateur est u' ; le trinôme ne s'annule jamais, $\Delta < 0$). 15) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 16) $\ln|\ln x|$ ($u = \ln x, u' = \frac{1}{x}$). 17) $\arctan(3x)$. 18) $\arcsin(2x)$.

Partie 3 — polynômes. 1. (a) $P = (x-1)(x^2-x-6) = (x-1)(x-3)(x+2)$: racines $[-2; 1; 3]$. (b) $P = (x-2)(x^2+1)$: racine réelle 2, et dans $\mathbb{C}$ les racines $\{2; i; -i\}$. (c) $P = (x-i)(x^2+1) = (x-i)^2(x+i)$: racines i (double), $-i$. (d) $2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 3 = (x^2 - x + 1)(2x^2 - x - 2) + (4x - 1)$: quotient $2x^2 - x - 2$, reste $4x - 1 \neq 0$ (la division ne « tombe pas juste »). 2. $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $P'(x) = 3x^2 - 3$ donne $P'(1) = 0$: 1 est bien racine double. Donc $P = (x-1)^2(x+2)$, et la troisième racine est $[-2]$. 3. $P = x(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x(x-2)^3$: racines $[0]$ (simple) et $[2]$ (triple).

Partie 4 — fractions rationnelles. Les trois « intruses » sans décomposition : 26), 29) et 30).

19) $\frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \right) \rightarrow \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right|$.

20) $\frac{5/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+2} \rightarrow \frac{5}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x+2|$.

21) Division d'abord : $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = x + 2 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-1| - \ln|x+1|$.

22) $\frac{2/9}{x-1} + \frac{4/3}{(x-1)^2} + \frac{7/9}{x+2} \rightarrow \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{4}{3(x-1)} + \frac{7}{9} \ln|x+2|$.

23) $-\frac{1/2}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2 + 1} \rightarrow -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan x$.

24) $\frac{1/4}{x} - \frac{\frac{1}{4}x}{x^2 + 4} \rightarrow \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 4)$.

25) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \rightarrow -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1|$.

26) Aucune décomposition : $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ ($\Delta = -16 < 0$), d'où $\rightarrow \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

27) Faire apparaître $u' = 2x + 2$: $3x + 1 = \frac{3}{2}(2x + 2) - 2$, d'où $\rightarrow \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

28) $\frac{1/4}{x-2} - \frac{1/4}{x+2} \rightarrow \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$.

29) Aucune décomposition (forme $u'u^{-4}$) : $\rightarrow -\frac{1}{3(x+3)^3}$.

30) Division : $\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow x - \arctan x$. Piège classique : $\int \frac{x^2}{x^2+1} \neq \frac{x^2}{\dots}$ — on ne « simplifie » pas une fraction rationnelle, on la divise.