

Outils mathématiques 1 — TD 7 : continuité, dérivabilité et fonctions réciproques

Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Chaque exercice porte un renvoi [TD 7 — ex. n] vers l'exercice de la feuille de TD auquel il se rapporte.

Boîte à outils.

• **Continuité en a** : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. *Prolonger par continuité* : si f n'est pas définie en a mais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ existe et est finie, on pose $f(a) = \ell$.

• **Dérivabilité en a** : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. **Dérivable $\Rightarrow$ continue**, mais la réciproque est **fausse** ($|x|$ en 0).

• **Raccord en a** d'une fonction définie par morceaux : continuité $\iff f(a^-) = f(a^+) = f(a)$; dérivabilité $\iff$ de plus $f'(a^-) = f'(a^+)$.

• **TVI** : f continue sur $[a; b]$ avec $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$ il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$. Si de plus f est *strictement monotone*, ce c est *unique* (théorème de la bijection).

• **Réciproques** : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

• **Composée** : $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(e^u)' = u'e^u$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

0. Test de positionnement (sans calculatrice, 15 min). Vrai ou faux ?

- (a) Toute fonction continue est dérivable.
- (b) Toute fonction dérivable est continue.
- (c) $|x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.
- (d) $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
- (e) $\arccos(0) = 0$.
- (f) La dérivée de $\arctan(x)$ est $\frac{1}{1+x^2}$.
- (g) Si f est continue sur $[0; 1]$ avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$, alors f s'annule sur $]0; 1[$.
- (h) Une fonction peut être dérivable sans que sa dérivée soit continue.

1. Ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.

Pour chaque affirmation : démontrer, ou donner un **contre-exemple explicite**.

- (a) Si f est continue en a , alors f est dérivable en a .
- (b) Si $|f|$ est continue, alors f est continue.
- (c) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f' est continue sur $\mathbb{R}$. (Examiner $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par $f(0) = 0$.)
- (d) Si $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a .
- (e) Une fonction continue sur $[a; b]$ y est bornée et atteint ses bornes.
- (f) Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires et encadrement.

On considère l'équation $x^3 + x = 1$.

- (a) Poser $h(x) = x^3 + x - 1$ et étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que l'équation admet une *unique* solution réelle α , et que $\alpha \in]0; 1[$.
- (c) Par *dichotomie*, donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Combien d'itérations sont nécessaires ? Indication : chaque étape divise la largeur par 2.
- (d) (Méthode de Newton.) Justifier que la suite $x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ converge très vite vers α . Partir de $x_0 = 1$ et calculer x_1, x_2, x_3 . Comparer à la dichotomie.

3. Prolongements par continuité, puis dérivabilité.

Chacune des fonctions suivantes n'est pas définie en 0 (ou en 2). Étudier si elle est prolongeable par continuité ; le cas échéant, étudier la *dérivabilité* du prolongement au point considéré.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{(b)} g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{(c)} h(x) = x^2 \ln |x| \\ \text{(d)} k(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} & \text{(e)} m(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ (en 2)} & \text{(f)} p(x) = |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

Pour (f) : le prolongement est-il dérivable en 0 ? Comparer avec $x \sin \frac{1}{x}$ et $x^2 \sin \frac{1}{x}$ du TD.

4. Raccord de morceaux : problème inverse.

(a) Déterminer a et b pour que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Deux conditions : laquelle assure la continuité ? laquelle la dérivabilité ?

(b) On pose maintenant

$$g(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + bx + x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

i. Montrer que g est *automatiquement* continue en 0, quels que soient a et b .

ii. Déterminer la relation entre a et b assurant la dérivabilité en 0.

iii. Déterminer a et b pour que g soit *deux fois* dérivable en 0 (classe C^2).

(c) Existe-t-il a et b rendant dérivable en 0 la fonction valant $|x|$ pour $x < 0$ et $ax^2 + bx$ pour $x \geq 0$? Attention au piège.

5. Calculs de dérivées.

Dériver, en précisant l'ensemble de dérivabilité :

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{1 + \cos x}{\sin x} & 2) \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 2} & 3) e^{\sqrt{x^2+1}} & 4) \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ 5) \cos^3(2x) & 6) \sqrt{3x^2 - 2x + 5} & 7) x^x \ (x > 0) & 8) \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ 9) \arcsin(3x - 1) & 10) \arccos\left(\frac{x}{3}\right) & 11) \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) & 12) \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{array}$$

Pour 7) : écrire $x^x = e^{x \ln x}$. Pour 12) : le résultat vous surprendra — le comparer à la dérivée de $\arctan x$.

6. Fonctions réciproques : identités et simplifications.

(a) Simplifier, pour x dans le domaine adéquat :

$$\sin(\arccos x) ; \quad \cos(\arcsin x) ; \quad \tan(\arcsin x) ; \quad \cos(\arctan x) ; \quad \sin(\arctan x)$$

Méthode : poser $\theta = \arccos x$, écrire ce que l'on sait de θ (son cosinus, son intervalle), puis utiliser $\sin^2 + \cos^2 = 1$ en choisissant le bon signe.

(b) Démontrer, par dérivation, que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ sur $[-1; 1]$. (Dériver, constater que la dérivée est nulle, puis évaluer en un point bien choisi.)

(c) Montrer de même que $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $]0; +\infty[$, et déterminer cette constante. Que vaut-elle sur $] -\infty; 0[$? Pourquoi la constante change-t-elle ?

(d) Résoudre : $\arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

(e) Compléter le tableau (valeurs *exactes*) :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$							
$\arccos(x)$							
$\arctan(x)$							

7. Exercice de synthèse : la caractéristique d'un capteur.

Un capteur délivre une tension U en fonction de la grandeur mesurée x selon

$$U = f(x) = 2 + 3 \arctan\left(\frac{x}{5}\right) \quad (U \text{ en V, } x \in \mathbb{R})$$

- Montrer que f est continue, dérivable et *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. En déduire l'intervalle image $J = f(\mathbb{R})$, et justifier que f réalise une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur J . Que signifie physiquement le fait que J soit borné ?
- Courbe d'étalonnage*. Déterminer la fonction réciproque f^{-1} , qui donne la valeur mesurée x à partir de la tension lue U . Préciser son domaine.
- Sensibilité*. La sensibilité du capteur est $S(x) = f'(x)$ (en V par unité de x). Calculer $S(x)$, montrer qu'elle est *maximale en* $x = 0$, et donner $S(0)$.
- Calculer $S(10)$ et $S(50)$. Que devient la sensibilité pour les grandes valeurs de x ? Comment nomme-t-on ce phénomène en métrologie, et quelle conséquence pratique en tirer sur le *domaine d'utilisation* du capteur ?
- Lien entre f et f^{-1}* . On admet que $(f^{-1})'(U) = \frac{1}{f'(f^{-1}(U))}$. Calculer $(f^{-1})'(2)$ et vérifier que c'est bien l'inverse de $S(0)$. Interpréter : une faible sensibilité du capteur signifie-t-elle une lecture précise ou imprécise ?

Corrigé express — résultats seuls

0. (a) **Faux** ($|x|$). (b) **Vrai**. (c) **Vrai**. (d) **Vrai**. (e) **Faux** : $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. (f) **Vrai**. (g) **Vrai** (TVI). (h) **Vrai** : $x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable partout, mais sa dérivée n'a pas de limite en 0.

1. (a) **Faux**. Contre-exemple : $f(x) = |x|$, continue en 0, mais $\frac{|h|}{h}$ vaut +1 à droite et -1 à gauche : pas de dérivée. (b) **Faux**. Contre-exemple : $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, -1 si $x < 0$: $|f| = 1$ est continue, mais f ne l'est pas. (c) **Faux**. Pour $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (et $f(0) = 0$) : $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$, donc f est dérivable en 0; mais pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite en 0 (le terme $\cos \frac{1}{x}$ oscille). Donc f' n'est pas continue en 0 : f est dérivable mais pas C^1 . (d) **Faux**. Contre-exemple : $f(x) = x^3$, avec $f'(0) = 0$ mais f strictement croissante : 0 est un point d'inflexion, pas un extremum. (e) **Vrai** (théorème des bornes atteintes; l'hypothèse « segment fermé borné » est essentielle). (f) **Vrai** (théorème de la bijection).

2. (a) $h'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{-\infty} h = -\infty$ et $\lim_{+\infty} h = +\infty$. (b) h continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: bijection, donc une seule solution α . Comme $h(0) = -1 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$, on a $\alpha \in]0; 1[$. (c) Dichotomie : $h(0,5) = -0,375 < 0$; $h(0,75) = 0,172 > 0$; $h(0,625) = -0,131 < 0$; $h(0,6875) = 0,012 > 0$; ... on obtient $0,68 < \alpha < 0,69$ (valeur exacte : $\alpha \approx 0,6823$). Pour passer d'une largeur 1 à 10^{-2} , il faut $2^{-n} \leq 10^{-2}$, soit $n \geq 7$ itérations. (d) Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1}$. Avec $x_0 = 1$: $x_1 = 0,75$; $x_2 \approx 0,6860$; $x_3 \approx 0,68234$. Trois itérations suffisent pour dépasser la précision atteinte par sept étapes de dichotomie : Newton double environ le nombre de décimales exactes à chaque étape.

3. (a) $\lim_0 f = 1$: prolongeable par $\tilde{f}(0) = 1$. Dérivable, avec $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{2}$ (en effet $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots$). (b) $\lim_0 g = \frac{1}{2}$: prolongeable par $\tilde{g}(0) = \frac{1}{2}$. (c) $\lim_0 h = 0$ (croissances comparées) : prolongeable par $\tilde{h}(0) = 0$. Dérivable : $\frac{h(x) - 0}{x} = x \ln |x| \rightarrow 0$, donc $\tilde{h}'(0) = 0$. (d) $\sin x \sim x$ et $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$, donc $\lim_0 k = 2$: prolongeable par $\tilde{k}(0) = 2$. (e) $m(x) = x + 2$ pour $x \neq 2$: $\lim_2 m = 4$, prolongeable par $\tilde{m}(2) = 4$; le prolongement est la droite $y = x + 2$, évidemment dérivable. (f) $|p(x)| \leq |x| \rightarrow 0$: prolongeable par $\tilde{p}(0) = 0$. Mais $\frac{p(x)}{x} = \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{x} = \pm \sin \frac{1}{x}$, qui n'a pas de limite : $\tilde{p}$ est **continue mais non dérivable** en 0. Récapitulatif de la « famille » : $x \sin \frac{1}{x}$ est continue non dérivable; $x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable mais pas C^1 ; $|x| \sin \frac{1}{x}$ est comme la première. Le facteur devant $\sin \frac{1}{x}$ décide de tout.

4. (a) Continuité en 1 : $a + b = 1$. Dérivabilité : la dérivée à droite vaut $2x|_{x=1} = 2$, celle à gauche vaut a , d'où $a = 2$ puis $b = -1$: $a = 2, b = -1$. (b) i. $g(0^-) = e^0 = 1$ et $g(0^+) = 1 + 0 + 0 = 1 = g(0)$: la continuité est acquise sans condition. ii. $g'(0^-) = a e^0 = a$ et $g'(0^+) = b + 2x|_0 = b$: dérivabilité $\iff a = b$. iii. $g''(0^-) = a^2$ et $g''(0^+) = 2$: il faut $a^2 = 2$, donc $a = b = \pm \sqrt{2}$. (c) **Non**. Pour $x < 0$, $|x| = -x$ donne une dérivée à gauche égale à -1 ; à droite, $(ax^2 + bx)' = 2ax + b \rightarrow b$. Il faudrait $b = -1$. Mais la continuité impose d'abord $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx) = 0$: c'est vérifié. Avec $b = -1$, la fonction est donc bien dérivable en 0 (de dérivée -1) — le « piège » est qu'il n'y en a pas : contrairement à $|x|$ sur $\mathbb{R}$, ici on ne raccorde que la demi-branchette $x < 0$, qui est une simple droite de pente -1 . Réponse : $b = -1, a$ quelconque.

5. 1) $\frac{-1}{1 - \cos x}$ (simplifier avant de dériver : $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan(x/2)}$). 2) $\frac{-x^2 + 14x + 2}{(x^2 + 2)^2}$. 3) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} e^{\sqrt{x^2 + 1}}$. 4) $\frac{-2}{1 - x^2}$ sur $] -1; 1[$. 5) $-6 \cos^2(2x) \sin(2x)$. 6) $\frac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 5}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 5}}$. 7) $x^x \ln(x + 1)$. 8) $\frac{-1}{1 + x^2}$ (sur $\mathbb{R}^*$). 9) $\frac{3}{\sqrt{1 - (3x - 1)^2}}$ sur $]0; \frac{2}{3}[$. 10) $\frac{-1}{\sqrt{9 - x^2}}$ sur $] -3; 3[$. 11) $\frac{1}{(1 + x^2)^{3/2} (1 + \frac{x^2}{1 + x^2})} = \frac{1}{(1 + 2x^2) \sqrt{1 + x^2}}$. 12)

$\frac{1}{1 + x^2}$ — la même que celle de $\arctan$! On en déduit $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \arctan(x)$ (les deux fonctions ont même dérivée et coïncident en 0).

6. (a) Pour $x \in [-1; 1]$: $\theta = \arccos x \in [0; \pi]$, où $\sin \geq 0$, donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. De même $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. (b) La dérivée de $\arcsin x + \arccos x$ vaut $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$: la somme est constante sur $] -1; 1[$. En $x = 0$: $0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. (c) La dérivée de $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ vaut $\frac{1}{1 + x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$. Sur $]0; +\infty[$, en $x = 1$: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Sur $] -\infty; 0[$, en $x = -1$: $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. La constante change parce que $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle : « dérivée nulle $\implies$

constante » n'est vrai que sur un intervalle. C'est l'erreur la plus fréquente sur cet exercice. (d) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, donc

$$x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Pour la seconde : en prenant la tangente, } \frac{x+2x}{1-2x^2} = 1, \text{ soit } 2x^2+3x-1=0, \text{ d'où } x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4};$$

seule $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0,281$ convient (l'autre racine, $\approx -1,78$, donne une somme d'arctangentes négative).

(e) Table :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0
$\arctan$	$-\frac{\pi}{4}$	—	—	0	—	—	$\frac{\pi}{4}$

(On vérifie sur chaque colonne que $\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}$.)

7. (a) $f'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{25}} = \frac{15}{25 + x^2} > 0$: f est dérivable (donc continue) et strictement croissante. (b)

$\arctan \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$, donc $f \rightarrow 2 \pm \frac{3\pi}{2}$: $J = \left] 2 - \frac{3\pi}{2}; 2 + \frac{3\pi}{2} \right[\approx] -2,71; 6,71[$ V. f continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur J : c'est une bijection. J borné signifie que la tension **sature** : quelle que soit la grandeur mesurée, le capteur ne

délivrera jamais plus de 6,71 V. (c) $U = 2 + 3 \arctan \frac{x}{5} \iff \arctan \frac{x}{5} = \frac{U-2}{3} \iff x = f^{-1}(U) = 5 \tan\left(\frac{U-2}{3}\right)$,

définie pour $U \in J$. (d) $S(x) = \frac{15}{25 + x^2}$: le dénominateur est minimal en $x = 0$, donc S est *maximale* en 0, avec

$$S(0) = \frac{15}{25} = 0,60 \text{ V/unité}. \quad (e) S(10) = \frac{15}{125} = 0,12; S(50) = \frac{15}{2525} \approx 0,0059 : \text{ la sensibilité s'effondre. C'est la}$$

saturation du capteur. Conséquence pratique : il faut l'utiliser *autour de* $x = 0$, là où la réponse est quasi linéaire et la sensibilité maximale ; loin de 0, une grande variation de la grandeur mesurée ne produit qu'une variation de tension négligeable, noyée dans le bruit. (f) $f^{-1}(2) = 5 \tan(0) = 0$, donc $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67$

(unités par volt). C'est bien l'inverse de $S(0)$: une faible sensibilité S donne un grand $(f^{-1})'$, c'est-à-dire qu'une petite erreur de lecture sur U se traduit par une **grande** erreur sur x . Faible sensibilité = mesure imprécise.