

Outils mathématiques 1 — TD 6 : branches infinies  
Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Chaque exercice porte un renvoi [TD 6 — ex. n] indiquant l'exercice de la feuille de TD auquel il se rapporte. Le corrigé express, en fin de document, permet l'autocorrection.

**Boîte à outils — la « méthode des trois questions ».** En un point  $a$  fini : si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , la droite  $x = a$  est *asymptote verticale*. En  $\pm\infty$ , on se pose *dans l'ordre* :

- **1.  $\lim f(x)$ ?** Si elle est *finie*  $= b$  : *asymptote horizontale*  $y = b$ . Terminé.
- **2. Sinon,  $\lim \frac{f(x)}{x}$ ?** Si  $= 0$  : *branche parabolique de direction*  $(Ox)$ . Si  $= \pm\infty$  : *branche parabolique de direction*  $(Oy)$ . Si  $= a$  fini non nul : on continue.
- **3.  $\lim(f(x) - ax)$ ?** Si  $= b$  fini : *asymptote oblique*  $y = ax + b$ . Si  $= \pm\infty$  : *branche parabolique de direction*  $y = ax$ . Si *pas de limite* : direction asymptotique  $y = ax$ , mais **pas** d'asymptote.
- **Position de  $C$  par rapport à son asymptote :** étudier le signe de  $f(x) - (ax + b)$ . *Positif* : la courbe est *au-dessus*.
- **Croissances comparées** (en  $+\infty$ ) :  $\ln x \ll x^\alpha \ll e^x$  — l'exponentielle l'emporte toujours, le logarithme perd toujours.

0. **Test de positionnement** (sans calculatrice, 15 min). Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant en une ligne.

- (a) Une courbe ne peut jamais couper son asymptote.
- (b) Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ , la droite  $y = 3$  est asymptote horizontale.
- (c) Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ , alors  $y = 2x$  est asymptote à  $C_f$ .
- (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .
- (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = 0$ .
- (f) La fonction  $x \mapsto 2x + \sin x$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$ .
- (g) Une fonction peut avoir deux asymptotes horizontales distinctes.
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

1. **Ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.**

Pour chaque affirmation, dire si elle est *toujours vraie*. Si oui, la démontrer ; sinon, donner un **contre-exemple explicite**.

- (a) Si  $C_f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$ , alors  $f$  n'est pas bornée.
- (b) Une courbe coupe son asymptote horizontale au plus une fois.
- (c) Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$  n'existe pas, alors  $C_f$  n'a pas d'asymptote oblique de pente 2.
- (d) Si  $f$  admet  $y = ax + b$  pour asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , c'est la même droite dans les deux cas.
- (e) Une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  ne peut pas avoir d'asymptote verticale.

2. **Étude complète d'une fonction avec radical.**

Soit  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ .

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- (b) Montrer que la droite  $\mathcal{D} : y = 2x + 1$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ . *Indication : multiplier par la quantité conjuguée.*
- (c) Étudier la position de  $C_f$  par rapport à  $\mathcal{D}$  en  $+\infty$ .
- (d) Montrer que  $C_f$  admet une asymptote *horizontale* en  $-\infty$ , et la déterminer. Préciser la position de la courbe. *Piège : en  $-\infty$ ,  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ , et non  $x$ .*

### 3. Classifier les branches infinies.

Pour chacune des fonctions ci-dessous, remplir le tableau : ensemble de définition, asymptotes verticales, puis *nature* de la branche infinie en  $\pm\infty$  (asymptote horizontale? oblique? branche parabolique? direction asymptotique sans asymptote?).

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{3}{x^2 - 4x + 3} & g_2(x) &= \frac{2x^3 + x + 1}{x^2 + 1} & g_3(x) &= x - \sqrt{3x} \\ g_4(x) &= \frac{x^2 - \ln x}{x} & g_5(x) &= \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} & g_6(x) &= 3x + \sin(2x) \\ g_7(x) &= 3^x - x^3 & g_8(x) &= \frac{x \ln x}{x - 1} \end{aligned}$$

Deux pièges sont dissimulés : une fonction se simplifie, une autre n'a **pas** l'asymptote verticale qu'on croit voir. Les débusquer.

### 4. Limites aux bornes et asymptotes.

Calculer les limites aux bornes de  $I$  et en déduire les asymptotes.

- (a)  $f(x) = 2x - \frac{3}{x+1}$  sur  $I = ]-1; +\infty[$
- (b)  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- (c)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$  sur  $I = ]2; +\infty[$
- (d)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- (e)  $f(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$  sur  $I = ]1; +\infty[$
- (f)  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$  sur  $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
- (g)  $f(x) = x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$  sur  $I = ]0; +\infty[$
- (h)  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$  sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

### 5. Limites en 0 : formes indéterminées.

Étudier l'existence d'une limite en 0 pour :

$$(a) \frac{e^x - 1}{x} \quad (b) \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad (c) \frac{\sin x}{|x|} \quad (d) \frac{1 - \cos x}{x} \quad (e) x \ln |x| \quad (f) \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Une seule de ces six fonctions n'admet pas de limite en 0 : laquelle, et pourquoi? Peut-on parler de « branche infinie » en 0 dans ce cas?

### 6. Problème inverse : fabriquer une asymptote.

- (a) Déterminer les réels  $a, b, c$  pour que la fonction  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$  admette la droite  $y = 3x + 1$  pour asymptote oblique, et que  $C_f$  passe par l'origine.
- (b) Pour ces valeurs, écrire  $f(x)$  sous la forme  $3x + 1 + \frac{k}{x - 2}$  et en déduire la position de  $C_f$  par rapport à son asymptote, ainsi que l'asymptote verticale.
- (c) Déterminer  $\alpha$  pour que  $g(x) = \frac{\alpha x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$  admette  $y = 2$  pour asymptote horizontale.
- (d) Peut-on choisir  $a, b, c$  pour que  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$  admette une asymptote horizontale? Justifier.

### 7. Exercice de synthèse : le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas.

Le gain d'un filtre passe-bas du premier ordre s'écrit

$$G(\omega) = \frac{G_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad \text{et l'on trace} \quad G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(G(\omega))$$

en fonction de  $\log_{10}(\omega)$  ( $\omega_c$  est la *pulsation de coupure*).

- (a) Montrer que  $G_{dB} = 20 \log_{10}(G_0) - 10 \log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$ .
- (b) *Comportement basse fréquence*. Déterminer  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}$ . Quelle est l'*asymptote horizontale* du diagramme ?
- (c) *Comportement haute fréquence*. Montrer que, lorsque  $\omega \gg \omega_c$ ,

$$G_{dB} \simeq 20 \log_{10}(G_0) - 20 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Dans le plan  $(\log_{10} \omega ; G_{dB})$ , il s'agit d'une *asymptote oblique*. Quelle est sa pente ? On l'exprime en « *décibels par décade* ».

- (d) Que vaut  $G_{dB}$  exactement en  $\omega = \omega_c$  ? En déduire pourquoi on parle de la fréquence de coupure « à -3 dB ».
- (e) Les deux asymptotes se coupent-elles ? En quel point ? Commenter : le tracé asymptotique (deux demi-droites) est-il une bonne approximation de la courbe réelle ?

## Corrigé express — résultats seuls

0. (a) **Faux** : elle peut la couper une infinité de fois (ex.  $\frac{\sin x}{x}$  coupe  $y = 0$  en tous les  $k\pi$ ). (b) **Vrai**. (c) **Faux** : il faut *en plus* que  $f(x) - 2x$  ait une limite finie. (d) **Vrai**. (e) **Faux** : la limite est  $+\infty$  (l'exponentielle l'emporte). (f) **Faux** :  $f(x) - 2x = \sin x$  n'a pas de limite ; il y a une *direction* asymptotique, pas d'asymptote. (g) **Vrai** : une en  $+\infty$ , une autre en  $-\infty$  (ex.  $\arctan$ ). (h) **Vrai**.

1. (a) **Vrai** :  $f(x) \sim ax$  avec  $a \neq 0$ , donc  $|f| \rightarrow +\infty$ . (b) **Faux**. Contre-exemple :  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  a pour asymptote  $y = 0$  en  $+\infty$ , et la coupe une *infinité* de fois. (c) **Vrai** : l'existence d'une limite finie de  $f(x) - ax$  est exactement la définition. (d) **Faux** : les deux asymptotes peuvent différer. Contre-exemple :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , d'asymptote  $y = x$  en  $+\infty$  et  $y = -x$  en  $-\infty$ . (e) **Vrai** : une asymptote verticale en  $a$  suppose  $f$  non définie (ou non finie) en  $a$ .

2. (a)  $x^2 + 2x = x(x+2) \geq 0$  :  $\mathcal{D}_f = ]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ . (b)  $f(x) - (2x+1) = \sqrt{x^2 + 2x} - (x+1) = \frac{(x^2 + 2x) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} \rightarrow 0$  :  $\mathcal{D} : y = 2x + 1$  est bien asymptote. (c) Cette différence est *strictement négative* :  $C_f$  est **au-dessous** de  $\mathcal{D}$ . (d) En  $-\infty$  :  $\sqrt{x^2 + 2x} = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = -x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$ , donc  $f(x) = x - x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \rightarrow -1$ . Asymptote **horizontale**  $y = -1$  ; on vérifie numériquement  $f(x) + 1 < 0$  : la courbe est **au-dessous**.

3.

|       | Domaine / As. verticales                              | En $+\infty$                                         | En $-\infty$                  |
|-------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $g_1$ | $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ ; A.V. $x = 1, x = 3$ | As. horiz. $y = 0$                                   | As. horiz. $y = 0$            |
| $g_2$ | $\mathbb{R}$ ; aucune                                 | <b>As. oblique</b> $y = 2x$                          | As. oblique $y = 2x$          |
| $g_3$ | $[0; +\infty[$                                        | <b>Br. parabolique</b> dir. $y = x$                  | —                             |
| $g_4$ | $]0; +\infty[$ ; A.V. $x = 0$                         | As. oblique $y = x$                                  | —                             |
| $g_5$ | $\mathbb{R}$ ; aucune                                 | Br. parabolique dir. ( $Oy$ )                        | As. horiz. $y = -1$           |
| $g_6$ | $\mathbb{R}$ ; aucune                                 | <b>Dir. asympt.</b> $y = 3x$ , <b>sans asymptote</b> | idem                          |
| $g_7$ | $\mathbb{R}$ ; aucune                                 | Br. parabolique dir. ( $Oy$ )                        | Br. parabolique dir. ( $Oy$ ) |
| $g_8$ | $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ ; <b>aucune A.V.</b>       | Br. parabolique dir. ( $Ox$ )                        | —                             |

Les deux pièges.  $g_5$  se simplifie :  $\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^x - 1$  — inutile de calculer quoi que ce soit ensuite.

$g_8$  : on croit voir une asymptote verticale en  $x = 1$ , mais  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x - 1} = 1$  (car  $\ln x \sim x - 1$ ) : la singularité est *apparente* (prolongeable par continuité). Détails :  $g_2 = 2x + \frac{1-x}{x^2+1}$  ;  $g_4 = x - \frac{\ln x}{x}$  (courbe *au-dessous* de  $y = x$  pour  $x > 1$ ) ;  $g_3$  et  $g_8$  :  $\frac{g}{x} \rightarrow 1$  et  $g - x \rightarrow -\infty$  pour  $g_3$  ;  $\frac{g_8}{x} \rightarrow 0$  pour  $g_8$ .

4. (a)  $\lim_{-1^+} = -\infty$  (A.V.  $x = -1$ ) ; en  $+\infty$ ,  $f - 2x \rightarrow 0$  : as. oblique  $y = 2x$  (courbe *au-dessous*). (b)  $\lim_{0^+} = +\infty$  (A.V.  $x = 0$ , car  $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ ) ;  $\lim_{+\infty} = 0$  (as. horiz.  $y = 0$ , coupée une infinité de fois). (c)  $\lim_{2^+} = +\infty$  (A.V.  $x = 2$ ) ;  $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}$  : as. oblique  $y = x + 2$ . (d)  $\lim_{0^+} = +\infty$  (A.V.  $x = 0$ ) ;  $\lim_{+\infty} = 1$  (as. horiz.  $y = 1$ ). (e)  $\lim_{1^+} = 1$  (*pas* d'asymptote verticale : singularité apparente) ;  $\lim_{+\infty} = 0$  (as. horiz.  $y = 0$ ). (f)  $\lim_{\pm\pi/2} = \pm\infty$  : deux asymptotes verticales  $x = \pm\frac{\pi}{2}$ . (g)  $\lim_{0^+} = 0$  ;  $\lim_{+\infty} = \frac{1}{2}$  : as. horizontale  $y = \frac{1}{2}$ . (Écrire  $\sqrt{1+u} - 1 \sim \frac{u}{2}$  avec  $u = \frac{1}{x}$ .) (h)  $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$  : **aucune** asymptote verticale (singularité apparente), et branche parabolique de direction ( $Oy$ ) des deux côtés.

5. (a) 1. (b)  $\frac{1}{2}$ . (c) **Pas de limite** :  $\lim_{0^+} = +1$  et  $\lim_{0^-} = -1$ . (d) 0 (car  $\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow \frac{1}{2} \times 0$ ). (e) 0 (croissances comparées). (f) 1.

La seule sans limite est (c), à cause de la valeur absolue qui brise la symétrie. Mais il ne s'agit *pas* d'une branche infinie : la fonction reste *bornée* au voisinage de 0 (elle oscille entre  $-1$  et  $+1$ ). Une *branche infinie* suppose que  $f$  ou  $x$  tende vers l'infini — ici, ni l'un ni l'autre.

6. (a) La division donne  $f(x) = ax + (b + 2a) + \frac{c + 2b + 4a}{x - 2}$ . On identifie :  $a = 3$  et  $b + 2a = 1$ , d'où  $b = -5$  ; puis  $f(0) = 0$  donne  $\frac{c}{-2} = 0$ , soit  $c = 0$ .  $\boxed{a = 3, b = -5, c = 0}$ . (b)  $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 2} = 3x + 1 + \frac{2}{x - 2}$ . Le reste  $\frac{2}{x - 2}$  est  $> 0$  pour  $x > 2$  (courbe *au-dessus*) et  $< 0$  pour  $x < 2$  (*au-dessous*). Asymptote verticale :  $x = 2$ . (c)

$\lim_{\pm\infty} g = \alpha$ , donc  $\boxed{\alpha = 2}$ . (d) **Non** : si  $a \neq 0$ , le degré du numérateur dépasse de 2 celui du dénominateur et  $f \sim ax \rightarrow \pm\infty$ ; si  $a = 0$ ,  $f = \frac{bx+c}{x-2} \rightarrow b$ , ce qui donne bien une asymptote horizontale — mais la fonction n'est alors plus du type demandé (le  $x^2$  a disparu). Une fraction rationnelle a une asymptote oblique si et seulement si  $\deg(\text{num}) = \deg(\text{dén}) + 1$ .

7. (a)  $20 \log(G) = 20 \log(G_0) - 20 \log \sqrt{1+u^2} = 20 \log(G_0) - 10 \log(1+u^2)$  avec  $u = \omega/\omega_c$ . (b) Quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 0$  et  $\log(1+u^2) \rightarrow 0$  :  $G_{\text{dB}} \rightarrow 20 \log_{10}(G_0)$ . **Asymptote horizontale**  $G_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(G_0)$  (le « plateau » du filtre). (c) Si  $u \gg 1$ ,  $1+u^2 \simeq u^2$  et  $10 \log(u^2) = 20 \log(u)$  :  $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log(G_0) - 20 \log(u)$ . En posant  $X = \log_{10} \omega$ , cela s'écrit  $G_{\text{dB}} \simeq [20 \log G_0 + 20 \log \omega_c] - 20 X$  : c'est bien une droite, de pente  $\boxed{-20 \text{ dB/décade}}$  (le gain perd 20 dB chaque fois que  $\omega$  est multipliée par 10). (d) En  $\omega = \omega_c$  :  $u = 1$  donc  $G_{\text{dB}} = 20 \log(G_0) - 10 \log 2 = 20 \log(G_0) - 3,01$ . Le gain a chuté de  $\approx 3$  dB sous le plateau : d'où le nom de **fréquence de coupure à -3 dB**. (En puissance, cela correspond exactement à un facteur  $1/2$ .) (e) Les deux asymptotes se coupent quand  $20 \log(u) = 0$ , c'est-à-dire en  $\omega = \omega_c$  : elles se croisent exactement à la pulsation de coupure, à la hauteur du plateau. Le tracé asymptotique est une excellente approximation loin de  $\omega_c$ , et son erreur est maximale en  $\omega_c$  — où elle vaut précisément les 3 dB de la question (d). C'est pourquoi, en pratique, on trace les deux asymptotes puis on « arrondit » le coude de 3 dB.