

Outils mathématiques 1 — Fonctions numériques
Base d'exercices supplémentaires — *entraînement en autonomie*

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Ils portent sur les *mêmes notions* que la feuille de TD (domaines, parité, symétries, périodicité, transformations de graphes, fonction de Heaviside), mais posent des questions de *nature différente* : contre-exemples, recherche d'erreur, problèmes inverses, lecture graphique, signaux physiques. Le corrigé express, en fin de document, permet l'autocorrection.

Boîte à outils.

- **Domaine** : dénominateur $\neq 0$; sous une racine, ≥ 0 ; dans un $\ln$, > 0 . *Ne jamais simplifier avant d'avoir déterminé le domaine.*
- **Parité** (D symétrique par rapport à 0) : f *paire* si $f(-x) = f(x)$ (axe Oy) ; f *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ (centre O , et $f(0) = 0$). *Une fonction peut n'être ni l'une ni l'autre.*
- **Symétries d'un graphe** : axe $x = a \iff f(a+h) = f(a-h)$; centre $(a;b) \iff f(a+h)+f(a-h) = 2b$ (pour tout h admissible). On peut aussi utiliser la dérivée pour simplifier les calculs.
- **Périodicité** : $f(x+T) = f(x)$. Si f est T -périodique, $x \mapsto f(\omega x)$ est $\frac{T}{|\omega|}$ -périodique. $\cos, \sin : 2\pi$; $\tan : \pi$; $\sin^2, |\sin| : \pi$
- **Transformations du graphe** : $f(x) + \lambda$: translation *verticale* ; $\lambda f(x)$: dilatation verticale ($\times \lambda$) ; $f(x - \lambda)$: translation *horizontale* (vers la droite si $\lambda > 0$) ; $f(\lambda x)$: contraction horizontale de rapport $1/\lambda$
- **Heaviside** : $\theta(x) = 0$ si $x < 0$, 1 si $x \geq 0$. Fenêtre (« porte ») sur $[a;b[$: $\Pi_{a,b}(x) = \theta(x-a) - \theta(x-b)$. Un signal causal s'écrit $s(x) \cdot \theta(x)$
- **Signal sinusoïdal** de valeur moyenne m , d'amplitude A , de période T , *maximal* en x_0 ; alors :
 $s(x) = m + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}(x - x_0)\right)$ et Valeur moyenne $\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s$; valeur efficace $S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}$.

0. **Test de positionnement** (sans calculatrice, 15 min). Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant en une ligne.

- (a) $\ln(x^2)$ est défini sur $\mathbb{R}$.
- (b) $\sqrt{x-3}$ est défini pour $x \geq 3$.
- (c) $x \mapsto x^3$ est impaire.
- (d) Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'origine.
- (e) $x \mapsto \sin(2x)$ est π -périodique.
- (f) La somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire.
- (g) Le graphe de $x \mapsto f(x-2)$ se déduit de celui de f par translation de 2 vers la *droite*.
- (h) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1. **Ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est *toujours vraie*. Si oui, la démontrer ; si non, produire un **contre-exemple explicite**.

- (a) Toute fonction est paire ou impaire.
- (b) Le produit de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
- (c) Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire, *quelle que soit* g .
- (d) Si f est impaire et définie en 0, alors $f(0) = 0$.
- (e) Si f est T -périodique, alors $x \mapsto f(2x)$ est T -périodique.
- (f) Une fonction périodique non constante ne peut pas être monotone sur $\mathbb{R}$.
- (g) (*Plus subtil.*) Si f et g admettent T pour période, alors T est la période *minimale* de $f+g$.

2. Ensembles de définition : les pièges.

(a) Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} & 2) f(x) = \ln(x^2 - 9) & 3) f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6} & 4) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \\ 5) f(x) = \frac{\ln x}{x-1} & 6) f(x) = \frac{1}{1 + \cos x} & 7) f(x) = \sqrt{\ln x} & 8) f(x) = \frac{\tan x}{x} \end{array}$$

Attention au 3) : la simplification apparente ne doit pas modifier le domaine.

(b) **Trouver l'erreur.** Un étudiant écrit :

$$\text{« La fonction } f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \text{ car } x^2 \geq 0 \text{ pour tout } x. \text{ De plus, } \sqrt{x^2} = x, \text{ donc } f(x) = 1 : f \text{ est constante. »}$$

Identifier les deux erreurs, corriger, et donner l'expression simple de f ainsi que sa parité. Quel lien peut-on faire avec la fonction de Heaviside θ ?

3. Parité et symétries : problèmes inverses.

- (a) Déterminer une relation entre a et b pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + 3$ (avec $a \neq 0$) admette la droite $x = 2$ pour axe de symétrie.
- (b) Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Montrer que C_f admet un centre de symétrie, et le déterminer. Méthode : chercher a tel que $f(a+h) + f(a-h)$ ne dépende pas de h .
- (c) Soit $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Écrire g sous la forme $g(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1}$, puis en déduire, sans calcul supplémentaire, le centre de symétrie de C_g .
- (d) (Décomposition.) Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $f = p + q$ avec p paire et q impaire, où

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad q(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Appliquer à $f(x) = e^x$. Reconnaissez-vous les deux fonctions obtenues ?

- (e) Compléter le tableau des règles de parité des composées $g \circ f$, en justifiant chaque case par un calcul de $g(f(-x))$:

	g paire	g impaire
f paire		
f impaire		

Illustrer la case « f impaire, g paire » avec $f = \sin$ et $g = \cos$.

4. Périodicité et transformations de graphes.

- (a) Déterminer la période (minimale) des fonctions suivantes, ou justifier qu'elles ne sont pas périodiques :

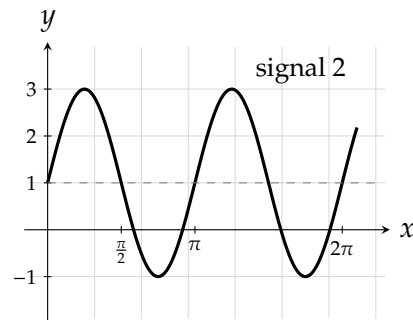
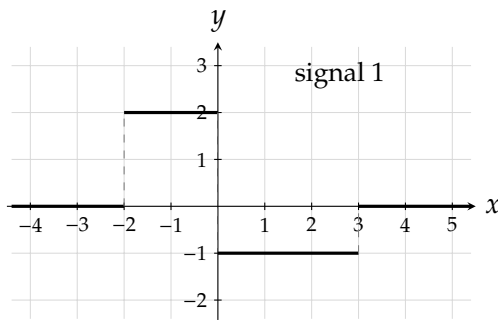
$$1) \sin\left(\frac{x}{3}\right) \quad 2) \cos(2x) + \cos(3x) \quad 3) \tan(3x) \quad 4) \sin^2(x) \quad 5) |\sin x| \quad 6) x + \cos(x)$$

Pour le 2) : chercher le plus petit T qui soit à la fois un multiple des deux périodes.

- (b) **Problème inverse.** Déterminer $\omega > 0$ pour que $x \mapsto \cos(\omega x)$ soit 5-périodique.
- (c) Soit f une fonction quelconque. Exprimer, en fonction de f , la fonction dont le graphe s'obtient à partir de C_f par : une translation de 3 vers la droite, puis une dilatation verticale de rapport -2 .
- (d) **L'ordre compte.** Comparer les graphes de $x \mapsto f(2x-4)$ et de $x \mapsto f(2x) - 4$. Pour le premier, écrire $2x-4 = 2(x-2)$: de combien le graphe est-il translaté horizontalement ? (Réponse attendue : ni 4, ni -4 .)
- (e) **Lecture d'un signal.** On donne $v(t) = 5 + 3 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (en volts, t en secondes). Déterminer : la valeur moyenne, l'amplitude, les valeurs extrêmes, la période, la fréquence, et l'instant du premier maximum pour $t \geq 0$.

5. Fonction de Heaviside : construire et lire des signaux.

- Tracer $\Pi(x) = \theta(x-1) - \theta(x-4)$. Comment nomme-t-on cette fonction ?
- Exprimer à l'aide de θ le signal s valant : 0 pour $x < 0$; 3 pour $0 \leq x < 2$; -1 pour $2 \leq x < 5$; 0 pour $x \geq 5$.
- Tracer $r(x) = (x-1)\theta(x-1) - (x-2)\theta(x-2)$. Décrire le signal obtenu en une phrase (le contexte physique : une grandeur qui *monte* puis *sature*).
- Salve*. Écrire à l'aide de θ le signal nul partout, sauf sur $[0; 2\pi[$ où il vaut $2 \sin(x)$.
- Problème inverse*. Déterminer l'expression d'un signal $u(t)$ tel que : u est sinusoïdal de valeur moyenne -1, d'amplitude 4 et de période 6; il est *minimal* en $t = 1$; il est nul en dehors de $[0; 12]$.
- Lecture graphique*. Donner l'expression des deux signaux représentés ci-dessous (le premier à l'aide de θ , le second sous forme sinusoïdale).



6. Application : valeur moyenne et valeur efficace d'un signal.

Un signal *créneau* $u(t)$, de période T , vaut U_0 pendant une fraction α de la période (le *rapport cyclique*, $0 < \alpha < 1$) et 0 le reste du temps.

- Écrire $u(t)$ sur une période $[0; T]$ à l'aide de la fonction de Heaviside.
- Calculer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ et la valeur efficace U_{eff} en fonction de U_0 et α . (On rappelle $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u$ et $U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$.)
- Application numérique : $U_0 = 5 \text{ V}$ et $\alpha = 0,30$.
- Le *facteur de forme* est défini par $F = \frac{U_{\text{eff}}}{\langle u \rangle}$. Le calculer en fonction de α seul. Que devient-il quand $\alpha \rightarrow 0$? Interpréter.
- Comparaison*. Pour un signal redressé double alternance $u(t) = A |\sin(\omega t)|$, on admet $\langle u \rangle = \frac{2A}{\pi}$ et $U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$. Calculer son facteur de forme et le comparer à celui du créneau. Lequel des deux signaux est le plus « régulier » ?

7. Exercice de synthèse : le profil de résonance (lorentzienne).

En spectroscopie, la réponse d'un système résonant est décrite par les deux fonctions

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{profil d'absorption}) \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (\text{profil de dispersion})$$

- Donner les ensembles de définition de L et D , puis étudier leur *parité*. Qu'en déduit-on sur leurs graphes ?
- Étudier L : limites en $\pm\infty$ (asymptote ?), maximum, sens de variation.
- La *largeur à mi-hauteur* est la longueur de l'intervalle sur lequel $L(x) \geq \frac{1}{2}L_{\text{max}}$. La calculer.
- Étudier D : calculer $D'(x)$, dresser le tableau de variations, donner les extrema et les limites. Le graphe admet-il un centre de symétrie ?
- Tracer L et D sur un même graphique, pour $x \in [-5; 5]$.
- Retour à la physique*. La courbe de résonance réelle, en fonction de la pulsation ω , s'écrit

$$\mathcal{L}(\omega) = A \cdot L\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right) = \frac{A}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right)^2}$$

- i. Décrire, en termes de *transformations de graphe*, le passage de L à $\mathcal{L}$ (translation ? dilatation ? dans quel sens ?).
- ii. Où se situe le maximum, et que vaut-il ?
- iii. Montrer que la largeur à mi-hauteur de $\mathcal{L}$ vaut 2γ . Quelle grandeur physique le paramètre γ mesure-t-il donc ?

Corrigé express — résultats seuls

Seuls les résultats finaux sont donnés, pas le détail des calculs.

0. (a) **Faux** : il faut $x^2 > 0$, donc $\mathbb{R}^*$. (b) **Vrai**. (c) **Vrai**. (d) **Faux** : par rapport à l'axe Oy (c'est la fonction *impaire* qui a un centre de symétrie en O). (e) **Vrai** : $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. (f) **Faux** : en général elle n'est ni paire ni impaire (ex. $x^2 + x$). (g) **Vrai**. (h) **Vrai** : $x^2 + 1 > 0$ toujours.

1. (a) **Faux** : la plupart ne sont ni l'une ni l'autre. Contre-exemple : $f(x) = x + 1$, avec $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$. (b) **Faux** : le produit de deux impaires est *paire*. $(fg)(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x)$. Contre-exemple : $x \times x = x^2$, qui est *paire*. (c) **Vrai** : $g(f(-x)) = g(f(x))$ — la *parité* de g n'intervient pas. (d) **Vrai** : $f(-0) = -f(0)$ donne $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$. (e) **Faux** : la période devient $T/2$. $f(2(x+T)) = f(2x+2T) = f(2x)$ montre bien que T est *une* période, mais pas la *minimale*. Contre-exemple : $\cos$ est 2π -périodique, $\cos(2x)$ est π -périodique. (f) **Vrai** : si f était strictement monotone, $f(x)$ et $f(x+T)$ seraient différents, ce qui contredit la périodicité. (g) **Faux** : T est *une* période de $f+g$, mais pas forcément la plus petite. Les termes peuvent se compenser. Contre-exemple : $f(x) = \cos x$ et $g(x) = -\cos x + \cos(2x)$ sont 2π -périodiques, mais $f+g = \cos(2x)$ est π -périodique.

2. (a) 1) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \geq 0$: $\mathcal{D} =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$. 2) $x^2 > 9$: $\mathcal{D} =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$. 3) **Piège** : le dénominateur s'annule en 2 et en 3, donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$ — même si l'expression se simplifie en $\frac{1}{x-3}$ sur ce domaine. On ne simplifie *jamais* avant d'avoir posé le domaine. 4) $x \geq 0$ et $\sqrt{x} \neq 2$: $\mathcal{D} = [0; +\infty[\setminus \{4\}$. 5) $\mathcal{D} =]0; 1[\cup]1; +\infty[$. 6) $\cos x \neq -1$: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. 7) $x > 0$ et $\ln x \geq 0$: $\mathcal{D} = [1; +\infty[$. 8) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}\right)$.

(b) **Deux erreurs**. (i) Le dénominateur x impose $x \neq 0$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$, et non $\mathbb{R}$. (ii) $\sqrt{x^2} = |x|$, et *non* x (faux pour $x < 0$). Donc $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$: c'est la fonction *signe*, qui est **impaire** (et non constante!). Lien avec Heaviside : $\theta(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x)}{2}$ pour $x \neq 0$ — l'échelon est la fonction signe « remise à l'échelle » entre 0 et 1.

3. (a) L'axe de la parabole est $x = -\frac{b}{2a}$; on veut $-\frac{b}{2a} = 2$, d'où $\boxed{b = -4a}$ (par exemple $a = 1, b = -4$). (b) $f(1+h) = h^3 - h$ et $f(1-h) = -h^3 + h$, donc $f(1+h) + f(1-h) = 0 = 2 \times 0$: C_f admet le **centre de symétrie** $\Omega(1; 0)$. (C'est le point d'inflexion : $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en $x = 1$.) (c) $g(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$: C_g est l'hyperbole $y = \frac{3}{x}$ translatée de 1 vers la droite et de 2 vers le haut. Comme $x \mapsto \frac{3}{x}$ est *impaire* (centre O), le centre de symétrie de C_g est $\boxed{\Omega(1; 2)}$ (contrôle : $g(1+h) + g(1-h) = 4 = 2 \times 2$). (d) p est bien *paire*, q *impaire*, et $p+q = f$. Pour $f(x) = e^x$:

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \quad \text{et} \quad q(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

Le cosinus et le sinus hyperboliques ne sont rien d'autre que les parties *paire* et *impaire* de l'exponentielle. (e) Tableau :

	g paire	g impaire
f paire	$g \circ f$ paire	$g \circ f$ paire
f impaire	$g \circ f$ paire	$g \circ f$ impaire

Règle à retenir : $g \circ f$ est *impaire* uniquement si les **deux** sont *impaires*; dans tous les autres cas (avec f ou g *paire*), la composée est *paire*. Illustration : $f = \sin$ (impaire), $g = \cos$ (paire) $\Rightarrow \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$: la composée est bien *paire*.

4. (a) 1) $T = 6\pi$. 2) Les périodes sont π et $\frac{2\pi}{3}$; le plus petit multiple commun est $\boxed{T = 2\pi}$ (en effet $2\pi = 2 \times \pi = 3 \times \frac{2\pi}{3}$). 3) $T = \frac{\pi}{3}$. 4) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, donc $T = \pi$. 5) $T = \pi$. 6) *Non périodique* (le terme x n'est pas borné).

(b) $\frac{2\pi}{\omega} = 5$, donc $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{5}}$. (c) $x \mapsto -2f(x-3)$. (d) $f(2x) - 4$: le graphe de $f(2x)$ est translaté de 4 vers le bas. $f(2x-4) = f(2(x-2))$: on *contracte* d'abord d'un facteur 2, puis on *translate* de $\boxed{2}$ (et non 4) vers la droite. C'est l'erreur classique : il faut *factoriser le coefficient de x avant de lire la translation*. (e) Valeur moyenne 5 V; amplitude 3 V; $u_{\max} = 8$ V, $u_{\min} = 2$ V; $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02$ s; $f = 50$ Hz; premier maximum quand $100\pi t - \frac{\pi}{3} = 0$, soit $t = \frac{1}{300} \approx 3,3$ ms.

5. (a) Π vaut 1 sur $[1; 4[$ et 0 ailleurs : c'est une *fonction porte* (ou *fenêtre*, ou *créneau unique*). (b) $s(x) = 3\theta(x) - 4\theta(x-2) + \theta(x-5)$. Contrôle : sur $[2; 5[$, on a $3 - 4 = -1$; au-delà de 5, $3 - 4 + 1 = 0$. (c) $r(x) = 0$ pour $x < 1$; $r(x) = x - 1$ (rampe) pour $1 \leq x < 2$; $r(x) = 1$ (plateau) pour $x \geq 2$: une *grandeur qui croît linéairement*

pendant une unité de temps, puis sature à la valeur 1. (d) $s(x) = 2 \sin(x) [\theta(x) - \theta(x - 2\pi)]$. (e) Minimal en $t = 1 \Rightarrow$ maximal en $t = 1 + \frac{T}{2} = 4$. Donc

$$u(t) = \left[-1 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}(t - 4)\right) \right] \cdot [\theta(t) - \theta(t - 12)]$$

(contrôle : $u(1) = -1 - 4 = -5$ minimum; $u(4) = -1 + 4 = 3$ maximum; période $\frac{2\pi}{\pi/3} = 6$.) (f) **Signal 1** : $s_1(x) = 2\theta(x + 2) - 3\theta(x) + \theta(x - 3)$ (contrôle : 2 sur $[-2; 0[$; $2 - 3 = -1$ sur $[0; 3[$; $2 - 3 + 1 = 0$ ensuite). **Signal 2** : valeur moyenne 1, amplitude 2, période π , maximum en $x = \frac{\pi}{4}$: $s_2(x) = 1 + 2 \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + 2 \sin(2x)$.

6. (a) $u(t) = U_0 [\theta(t) - \theta(t - \alpha T)]$ sur $[0; T]$. (b) $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} U_0 dt = \alpha U_0$; $\langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} U_0^2 dt = \alpha U_0^2$, donc $U_{\text{eff}} = U_0 \sqrt{\alpha}$. (c) $\langle u \rangle = 1,5$ V et $U_{\text{eff}} = 5\sqrt{0,3} \approx 2,74$ V. Noter que $U_{\text{eff}} > \langle u \rangle$: c'est toujours le cas. (d)

$F = \frac{U_0 \sqrt{\alpha}}{\alpha U_0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ($\approx 1,83$ pour $\alpha = 0,30$). Quand $\alpha \rightarrow 0$, $F \rightarrow +\infty$: le signal devient une impulsion très brève et très « pointue » — sa valeur moyenne s'effondre bien plus vite que sa valeur efficace. Un facteur de forme élevé signale un signal impulsionnel; $F = 1$ correspondrait à un signal continu. (e) $F = \frac{A/\sqrt{2}}{2A/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$: bien plus proche de 1 que le créneau à $\alpha = 0,3$. Le signal redressé est donc nettement plus régulier (moins impulsionnel).

7. (a) $1 + x^2 > 0$ toujours : $\mathcal{D}_L = \mathcal{D}_D = \mathbb{R}$. $L(-x) = L(x)$: L est **paire** (graphe symétrique par rapport à l'axe Oy). $D(-x) = -D(x)$: D est **impaire** (graphe symétrique par rapport à O). (b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} L(x) = 0$: l'axe Ox est

asymptote horizontale. $L'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$, du signe de $-x$: L croît sur $] -\infty; 0]$, décroît sur $[0; +\infty[$, avec un maximum $L(0) = 1$. (c) $L(x) \geq \frac{1}{2} \iff 1 + x^2 \leq 2 \iff |x| \leq 1$: la largeur à mi-hauteur vaut $\boxed{2}$. (d)

$D'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$, du signe de $1 - x^2$: D décroît sur $] -\infty; -1]$, croît sur $[-1; 1]$, décroît sur $[1; +\infty[$. Minimum $D(-1) = -\frac{1}{2}$, maximum $D(1) = +\frac{1}{2}$; limites nulles en $\pm\infty$. D étant impaire, son graphe admet O pour **centre de symétrie**. (e) L : « cloche » centrée en 0, de hauteur 1. D : courbe en « S » antisymétrique, qui passe par O et présente deux extrema en $x = \pm 1$. (f) i. On passe de L à $\mathcal{L}$ par : une *dilatation horizontale* de rapport γ (via $x \mapsto x/\gamma$), une *translation horizontale* de ω_0 , et une *dilatation verticale* de rapport A . ii. Le maximum est atteint

en $\omega = \omega_0$ (la *pulsation de résonance*) et vaut $\mathcal{L}(\omega_0) = A$. iii. $\mathcal{L}(\omega) \geq \frac{A}{2} \iff \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right)^2 \leq 1 \iff |\omega - \omega_0| \leq \gamma$, soit

$\omega \in [\omega_0 - \gamma; \omega_0 + \gamma]$: la largeur à mi-hauteur vaut $\boxed{2\gamma}$. γ mesure donc la **largeur de la résonance**, c'est-à-dire l'**amortissement** du système : une résonance fine (grand facteur de qualité $Q = \omega_0/2\gamma$) correspond à un γ petit. On retrouve ici, sur un cas de physique, toutes les transformations de graphes de l'exercice 4.