

Outils mathématiques 1 — TD 3 : nombres complexes

Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Ils portent sur les *mêmes notions* que la feuille de TD, mais posent des questions de *nature différente* : validation de propriétés par contre-exemples, problèmes inverses, lieux géométriques, transformations du plan, applications en électricité et en optique. Le corrigé express, en fin de document, permet l'autocorrection.

Boîte à outils. Pour $z = x + iy = r e^{i\theta}$ (avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$) :

• **trois écritures** : algébrique $x + iy$; trigonométrique $r(\cos \theta + i \sin \theta)$; exponentielle $r e^{i\theta}$. On additionne en algébrique, on multiplie en exponentielle.

• **conjugué** $\bar{z} = x - iy$; $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$; $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$; $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$; $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

• **module et argument** : $|zz'| = |z||z'|$; $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$; $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$

• **Moivre** : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; **Euler** : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

• **géométrie** : affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$; $AB = |z_B - z_A|$; $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

• **transformations** : $z \mapsto z + b$ translation ; $z \mapsto \bar{z}$ symétrie axiale ; $z \mapsto az$ ($a = \rho e^{i\alpha}$) rotation d'angle α et homothétie de rapport ρ (*similitude directe*)

• **racines n-ièmes** de $\rho e^{i\varphi}$: $z_k = \rho^{1/n} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}$, $k = 0, \dots, n-1$: n solutions, sommets d'un polygone régulier

En physique (électricité), on note j au lieu de i , la lettre i étant réservée à l'intensité.

0. **Test de positionnement** (sans calculatrice, 15 min). Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant en une ligne.

(a) $|3 + 4i| = 7$.

(b) $|z|^2 = z^2$.

(c) Le conjugué de $3 - 2i$ est $3 + 2i$.

(d) $e^{i\pi} = -1$.

(e) $(1 + i)^2 = 2i$.

(f) $\arg(i) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

(g) L'équation $z^2 = -4$ n'a pas de solution.

(h) Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre.

1. **Ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est *toujours vraie*. Si oui, la démontrer ; si non, produire un **contre-exemple explicite**.

(a) $|z + z'| = |z| + |z'|$.

(b) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.

(c) $z^2 = |z|^2$.

(d) Si $z^2 \in \mathbb{R}$, alors $z \in \mathbb{R}$.

(e) Si $|z| = 1$ (avec $z \neq 0$), alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

(f) $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Re}(z')$.

(g) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.

2. **Problèmes inverses : trouver le paramètre.**

(a) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ le nombre $z = \frac{2 + ai}{1 - i}$ est-il *réel* ? *imaginaire pur* ? Méthode : multiplier par la quantité conjuguée, puis annuler la partie voulue.

- (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $m \in \mathbb{R}$ a-t-on $|3 + mi| = 5$? Interpréter géométriquement le nombre de solutions.
- (c) Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1$. *Indication : reconnaître une formule d'Euler.*
- (d) On sait que $1 + 2i$ est racine de l'équation $z^2 + bz + c = 0$, où b et c sont des réels. Déterminer b et c sans calcul lourd. *Indication : quelle est l'autre racine ?*
- (e) (*Plus délicat.*) Déterminer l'ensemble des $z \neq 0$ tels que $z + \frac{1}{z}$ soit réel. *Indication : poser $z = re^{i\theta}$ et annuler la partie imaginaire.*

3. Lieux géométriques : traduire une condition sur z .

Dans chaque cas, déterminer et tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée. On rappelle que $|z - z_A|$ se lit « distance AM ».

- (a) $|z - 1 + 2i| = 3$
- (b) $|z - 2| = |z + i|$ (*reconnaître l'ensemble avant tout calcul*)
- (c) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ (*attention : droite ou demi-droite ?*)
- (d) $|z - 1| = 2|z|$ (*le résultat peut surprendre : mener le calcul en posant $z = x + iy$*)
- (e) $\frac{z-1}{z+1}$ est un imaginaire pur (*mener le calcul, puis interpréter le résultat à l'aide d'un angle droit*)



4. Les complexes comme transformations du plan.

À chaque application f ci-dessous, associer la transformation géométrique correspondante (translation, rotation, homothétie, symétrie, similitude), en précisant tous ses éléments caractéristiques (vecteur, centre, angle, rapport).

- (a) $f(z) = z + 3 - 2i$
- (b) $f(z) = \bar{z}$
- (c) $f(z) = 2z$
- (d) $f(z) = iz$
- (e) $f(z) = (1 + i)z$ (*écrire $1 + i$ sous forme exponentielle*)
- (f) $f(z) = iz + 1 - i$ (*chercher d'abord le point fixe, c'est-à-dire ω tel que $f(\omega) = \omega$*)
- (g) Soit $g(z) = z + 2$. Déterminer $g \circ f_d$, où $f_d(z) = iz$, et identifier la transformation obtenue. La composée d'une rotation et d'une translation est-elle une translation ?

5. Reconnaître une configuration à partir des affixes.

La quantité $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ contient toute l'information sur le triangle ABC : son *module* est le rapport AC/AB , son *argument* est l'angle orienté en A .

- (a) Soient A, B, C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = 4i$. Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature exacte du triangle ABC . Calculer son aire.

- (b) Soient A, B, C d'affixes $z_A = 0, z_B = 2$ et $z_C = 1 + i\sqrt{3}$. Vérifier que $z_C - z_A = e^{i\pi/3}(z_B - z_A)$. Que peut-on en conclure sur le triangle? Calculer son aire.
- (c) Soient A, B, C d'affixes $z_A = 1 + i, z_B = 3 + 2i$ et $z_C = 7 + 4i$. Montrer que ces trois points sont alignés. Quelle condition sur $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ caractérise l'alignement?
- (d) Traduire à l'aide des affixes la condition « $ABCD$ est un parallélogramme ». Vérifier sur $z_A = 1, z_B = 3 + i, z_C = 4 + 4i, z_D = 2 + 3i$.

6. Calculs, puissances et équations dans $\mathbb{C}$.

- (a) Écrire $z = -\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle. En déduire z^{12} sans développer. Le résultat est-il réel? Pourquoi était-ce prévisible?
- (b) Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$ sous forme algébrique. Méthode : poser $z = a + ib$ et résoudre le système $a^2 - b^2 = 3, 2ab = 4, a^2 + b^2 = |3 + 4i|$. Pourquoi ajouter la troisième équation, alors que les deux premières suffisent en théorie?
- (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 5 = 0$. Comparer avec l'exercice 2(d).
- (d) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z + \bar{z} = 3 - i$. Attention : ce n'est pas une équation polynomiale — poser $z = x + iy$.
- (e) Déterminer les trois racines cubiques de $8i$ sous forme exponentielle puis algébrique. Les placer dans le plan complexe : que constate-t-on? Calculer leur somme.
- (f) Déterminer les six racines sixièmes de l'unité. Montrer que leur somme est nulle, et interpréter ce résultat géométriquement (penser au barycentre d'un polygone régulier).

7. Trigonométrie : Moivre et Euler.

- (a) À l'aide de la formule de Moivre appliquée à $(\cos x + i \sin x)^3$, exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
- (b) (Linéarisation.) À l'aide des formules d'Euler, exprimer $\cos^3 x$ comme une combinaison linéaire de $\cos(3x)$ et $\cos(x)$. À quoi sert la linéarisation, en pratique, lorsqu'on doit intégrer?
- (c) On pose $z = -1 + i$ et $z' = \sqrt{3} + i$.
- Donner les formes exponentielles de z et z' .
 - Calculer zz' sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
 - Procéder de même avec $\frac{z}{z'}$ pour obtenir $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

8. Applications en physique : l'impédance complexe.

En électricité, on note j le nombre imaginaire ($j^2 = -1$). À un dipôle en régime sinusoïdal de pulsation ω on associe une impédance complexe $\underline{Z}$:

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jL\omega, \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$$

Le module $|\underline{Z}|$ est l'impédance (en Ω) et l'argument $\varphi = \arg(\underline{Z})$ est le déphasage de la tension par rapport au courant.

- (a) On considère un circuit série $R = 100 \Omega, L = 0,20 \text{ H}$ et $C = 10 \mu\text{F}$, alimenté à $\omega = 500 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- Calculer $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$, puis $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ sous forme algébrique.
 - En déduire $|\underline{Z}|$ et φ . Le circuit est-il inductif ou capacitif? La tension est-elle en avance ou en retard sur le courant?
 - La tension efficace d'alimentation vaut $U = 10 \text{ V}$. Calculer l'intensité efficace $I = U/|\underline{Z}|$.
- (b) Résonance. Pour quelle pulsation ω_0 la partie imaginaire de $\underline{Z}$ s'annule-t-elle? Donner l'expression littérale, puis la valeur numérique de ω_0 et de la fréquence f_0 . Que valent alors $|\underline{Z}|$, φ et I ? Commenter.
- (c) Lien avec le TD 1. Comparer la méthode « impédance complexe » à la construction de Fresnel vue en géométrie plane. Quel est l'avantage pratique de la notation complexe?

9. Exercice de synthèse : interférences de deux ondes.

Deux ondes de même pulsation ω et de même amplitude A arrivent en un point avec un déphasage φ . On leur associe les amplitudes complexes $\underline{s}_1 = A$ et $\underline{s}_2 = A e^{j\varphi}$.

- (a) Montrer que $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{j\varphi/2}$. Indication : mettre $e^{j\varphi/2}$ en facteur, puis utiliser la formule d'Euler.
- (b) En déduire l'amplitude résultante $|\underline{s}|$ et le déphasage de l'onde résultante.
- (c) L'intensité lumineuse est proportionnelle au carré de l'amplitude : $I \propto |\underline{s}|^2$. Montrer que $I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, où $I_0 \propto A^2$ est l'intensité d'une onde seule.
- (d) Pour quelles valeurs de φ les interférences sont-elles *constructives* (I maximale)? *destructives* ($I = 0$)? Que vaut alors I en fonction de I_0 ?
- (e) *Le paradoxe apparent*. Aux franges brillantes, $I = 4I_0$ alors que la somme des intensités isolées vaudrait $2I_0$. Y a-t-il création d'énergie? Calculer l'intensité moyenne $\langle I \rangle$ sur toutes les valeurs de φ et conclure. (On rappelle que la valeur moyenne de $\cos^2$ vaut $1/2$.)
- (f) Deux tensions sinusoïdales $s_1(t) = 3 \cos(\omega t)$ et $s_2(t) = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ se superposent. En utilisant les amplitudes complexes, déterminer l'amplitude et la phase de la somme $s_1 + s_2$.

Corrigé express — résultats seuls

Seuls les résultats finaux sont donnés, pas le détail des calculs. Valeurs numériques arrondies.

0. (a) **Faux** : $\sqrt{9+16} = 5$. (b) **Faux** : $|z|^2 = z\bar{z}$, ce n'est pas z^2 (sauf si z est réel). (c) **Vrai**. (d) **Vrai**. (e) **Vrai** : $1+2i+i^2=2i$. (f) **Vrai**. (g) **Faux** : $z=\pm 2i$. (h) **Vrai**.

1. (a) **Faux** (inégalité triangulaire : on a seulement $\leq$). Contre-exemple : $z=1, z'=i$ donnent $|z+z'|=\sqrt{2}\approx 1,41$ alors que $|z|+|z'|=2$. (b) **Vrai** : c'est la propriété fondamentale de l'argument (multiplier, c'est ajouter les angles). (c) **Faux** : la bonne identité est $z\bar{z}=|z|^2$. Contre-exemple : $z=i$ donne $z^2=-1$ alors que $|z|^2=1$. (d) **Faux** : z peut être *imaginaire pur*. Contre-exemple : $z=i$, avec $z^2=-1\in\mathbb{R}$. (e) **Vrai** : $z\bar{z}=|z|^2=1$, donc $\bar{z}=1/z$. (f) **Faux** : $\operatorname{Re}(zz')=\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')-\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$. Contre-exemple : $z=z'=i$ donnent $\operatorname{Re}(-1)=-1$, alors que $\operatorname{Re}(i)\times\operatorname{Re}(i)=0$. (g) **Faux** : $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)=0$ signifie seulement que z est *imaginaire pur*. Contre-exemple : $z=3i$.

2. (a) $z = \frac{(2+ai)(1+i)}{2} = \frac{(2-a)+(2+a)i}{2}$: réel si $\boxed{a=-2}$ (et alors $z=2$); imaginaire pur si $\boxed{a=2}$ (et alors $z=2i$). (b) $9+m^2=25$, d'où $\boxed{m=\pm 4}$. Géométriquement : la droite verticale d'abscisse 3 coupe le cercle de rayon 5 en deux points. (c) $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta=1$, donc $\cos\theta=\frac{1}{2}$: $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}\text{ ou }\frac{5\pi}{3}}$. (d) Les coefficients étant réels, l'autre racine est la conjuguée $1-2i$. Alors somme $=2=-b$ et produit $=(1+2i)(1-2i)=1+4=5=c$, d'où $\boxed{b=-2, c=5}$: l'équation est $z^2-2z+5=0$. (e) Avec $z=re^{i\theta}$: $z+\frac{1}{z}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$. La partie imaginaire s'annule si $\sin\theta=0$ (z réel non nul) ou si $r=\frac{1}{r}$, c'est-à-dire $\boxed{|z|=1}$. L'ensemble cherché est donc la réunion de l'axe réel privé de O et du cercle unité.

3. (a) Cercle de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon 3. (b) $|z-2|=|z+i|$ se lit $AM=BM$ avec $A(2;0)$ et $B(0;-1)$: c'est la médiatrice de $[AB]$, d'équation $\boxed{4x+2y-3=0}$. (c) Demi-droite d'origine le point d'affixe i (*exclue*, car $\arg 0$ n'existe pas), dirigée par $e^{i\pi/4}$, donc de « pente 1 » : $y=x+1$ avec $x>0$. Ce n'est pas la droite entière : l'argument fixe une direction et un sens. (d) En posant $z=x+iy$: $(x-1)^2+y^2=4(x^2+y^2)$, soit $3x^2+3y^2+2x-1=0$, c'est-à-dire $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$: c'est un cercle de centre $\left(-\frac{1}{3};0\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$ (cercle d'Apollonius). On pouvait s'attendre à une droite (comme en (b)) : c'est le rapport $2\neq 1$ qui change tout. (e) $\frac{z-1}{z+1}=\frac{(x^2+y^2-1)+2iy}{|z+1|^2}$: la partie réelle s'annule ssi $x^2+y^2=1$. L'ensemble est le cercle unité, privé du point d'affixe -1 (où le quotient n'est pas défini). Interprétation : $\arg\frac{z-1}{z+1}=\pm\frac{\pi}{2}$ signifie $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$ avec $A(1)$ et $B(-1)$: on retrouve le cercle de diamètre $[AB]$.

4. (a) Translation de vecteur d'affixe $3-2i$, c'est-à-dire $(3;-2)$. (b) Symétrie axiale par rapport à l'axe des réels. (c) Homothétie de centre O et de rapport 2. (d) $i=e^{i\pi/2}$: rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. (e) $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$: similitude directe de centre O , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ (rotation et agrandissement). (f) Point fixe : $\omega=i\omega+1-i$ donne $\omega(1-i)=1-i$, soit $\omega=1$. Comme $|i|=1$, il s'agit d'une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe 1. (g) $g\circ f_d(z)=iz+2$; point fixe : $\omega=\frac{2}{1-i}=1+i$. C'est encore une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, de centre le point d'affixe $1+i$. **Non** : composer une rotation avec une translation ne donne pas une translation, mais une rotation de même angle, dont le centre a été déplacé.

5. (a) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-1+3i}{3+i}=i$. Le module vaut 1 ($AC=AB$) et l'argument $\frac{\pi}{2}$ (angle droit en A) : le triangle est **isocèle rectangle en A** , et $\operatorname{direct.} AB=\sqrt{10}$, donc $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times 10=5$. (b) $e^{i\pi/3}\times 2=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}=z_C-z_A$. La transformation qui envoie B sur C est donc la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, sans changement de longueur :

$AB=AC$ et $\widehat{BAC}=60^\circ$, donc le triangle est **équilatéral** (direct), de côté 2 et d'aire $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}\approx 1,73$.

(c) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{6+3i}{2+i}=3\in\mathbb{R}$: l'argument est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *colinéaires* : les points sont alignés (et $AC=3AB$). **Caractérisation : le quotient est réel.** (d) $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \iff z_B-z_A=z_C-z_D \iff \boxed{z_A+z_C=z_B+z_D}$. Vérification : $z_A+z_C=1+(4+4i)=5+4i$ et $z_B+z_D=(3+i)+(2+3i)=5+4i$: égalité, c'est bien un parallélogramme.

6. (a) $|z|=2$ et $\arg z=\frac{5\pi}{6}$, donc $z=2e^{i5\pi/6}$. Alors $z^{12}=2^{12}e^{i10\pi}=4096e^{i0}=\boxed{4096}$: c'est un réel positif. Prévisible : $12\times\frac{5\pi}{6}=10\pi$ est un multiple de 2π , donc le résultat retombe sur l'axe réel positif. (b) $a^2=4$ et

$b^2 = 1$ avec $ab = 2 > 0$ (donc a et b de même signe) : $\boxed{z = 2 + i \text{ ou } z = -2 - i}$ (vérification : $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$). La troisième équation ($a^2 + b^2 = 5$) est ajoutée parce que, combinée à $a^2 - b^2 = 3$, elle donne a^2 et b^2 par simple addition/soustraction : elle évite de résoudre une équation bicarrée. (c) $\Delta = 4 - 20 = -16$, donc $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = \boxed{1 \pm 2i}$: on retrouve bien la racine donnée en 2(d) et sa conjuguée. (d) En posant $z = x + iy$: $2(x + iy) + (x - iy) = 3x + iy = 3 - i$, d'où $x = 1$ et $y = -1$: $\boxed{z = 1 - i}$ (solution unique : ce n'est pas une équation du second degré). (e) $8i = 8e^{i\pi/2}$, donc $z_k = 2e^{i(\pi/6 + 2k\pi/3)}$: $z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$; $z_1 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i$; $z_2 = 2e^{i3\pi/2} = -2i$. Les trois points sont sur le cercle de rayon 2, espacés de $\frac{2\pi}{3}$: ils forment un triangle équilatéral. Leur somme est nulle (le centre du cercle est leur isobarycentre). On remarque que z_1 est le nombre de la question (a). (f) $z_k = e^{ik\pi/3}$, $k = 0, \dots, 5$: $1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$: sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle unité. Somme nulle : par la formule de la suite géométrique, $\sum_{k=0}^5 q^k = \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 0$ avec $q = e^{i\pi/3} \neq 1$. Géométriquement : l'isobarycentre des sommets d'un polygone régulier est son centre, c'est-à-dire O .

7. (a) En développant $(\cos x + i \sin x)^3$ et en identifiant parties réelle et imaginaire avec $\cos 3x + i \sin 3x$:

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \quad \sin(3x) = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

(b) $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x) + 3 \cos(x)}{4}$. Intérêt : une somme de cosinus s'intègre immédiatement, alors qu'une puissance de cosinus, non. (c) i. $z = -1 + i = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}$ et $z' = \sqrt{3} + i = 2 e^{i\pi/6}$. ii. $zz' = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$ et $zz' = 2\sqrt{2} e^{i11\pi/12}$ (car $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12}$). En identifiant :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx -0,966, \quad \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx 0,259$$

iii. $\frac{z}{z'} = \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{4}$ et $\frac{z}{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i7\pi/12}$ (car $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$), d'où

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \approx -0,259, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,966$$

8. (a) i. $L\omega = 100 \, \Omega$ et $\frac{1}{C\omega} = 200 \, \Omega$, d'où $\underline{Z} = 100 - 100j \, \Omega$. ii. $|\underline{Z}| = 100\sqrt{2} \approx 141 \, \Omega$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$. La partie imaginaire est négative : le circuit est **capacitif**, et la tension est en retard de 45° sur le courant. iii.

$I = \frac{10}{141} \approx 71 \, \text{mA}$. (b) La partie imaginaire s'annule pour $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, soit $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \approx 707 \, \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$,

donc $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 113 \, \text{Hz}$. À la résonance : $\underline{Z} = R = 100 \, \Omega$ (minimale), $\varphi = 0$ (tension et courant en phase) et $I = \frac{10}{100} = 100 \, \text{mA}$ (maximale). Le circuit se comporte alors comme une simple résistance : L et C se « compensent ».

(c) Les deux méthodes sont la même : un vecteur de Fresnel de norme V et de phase φ est le complexe $Ve^{j\varphi}$. L'avantage du complexe est qu'on peut diviser (donc calculer $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$, ou appliquer un pont diviseur), ce que la construction graphique ne permet pas ; et que les associations série ou parallèle s'écrivent comme en continu.

9. (a) $\underline{s} = A(1 + e^{j\varphi}) = Ae^{j\varphi/2}(e^{-j\varphi/2} + e^{j\varphi/2}) = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{j\varphi/2}$. (b) Amplitude $\left|2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|$; l'onde résultante est déphasée de $\frac{\varphi}{2}$ (elle est « à mi-chemin » des deux ondes — ce qui est intuitif). (c) $I \propto |\underline{s}|^2 = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$,

donc $\boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$. (d) Constructives : $\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1$, soit $\varphi = 2k\pi$ (ondes en phase) : $I = 4I_0$. Destructives :

$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$, soit $\varphi = \pi + 2k\pi$ (ondes en opposition de phase) : $I = 0$. (e) Non, il n'y a aucune création d'énergie : l'énergie est redistribuée spatialement. La moyenne vaut $\langle I \rangle = 4I_0 \times \langle \cos^2 \rangle = 4I_0 \times \frac{1}{2} = 2I_0$, c'est-à-dire exactement la somme des intensités isolées. Ce que l'on gagne dans les franges brillantes ($4I_0$), on le perd dans les franges sombres (0). (f) $\underline{s}_1 = 3$ et $\underline{s}_2 = 4e^{j\pi/2} = 4j$, d'où $\underline{s} = 3 + 4j$: amplitude $|\underline{s}| = \boxed{5}$ et phase $\arg(\underline{s}) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,1^\circ \approx 0,927 \, \text{rad}$. Soit $s(t) = 5 \cos(\omega t + 0,927)$. C'est exactement le calcul de Fresnel du TD 1, mené en une ligne.