

Outils mathématiques 1 — TD 2 : géométrie dans l'espace
Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Ils portent sur les *mêmes notions* que la feuille de TD, mais posent des questions de *nature différente* : problèmes inverses (trouver le paramètre), validation de propriétés par contre-exemples, reconnaissance de configurations, nouveaux contextes physiques. Le corrigé express, en fin de document, permet l'autocorrection. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct.

Boîte à outils. Pour $\vec{u} = (x; y; z)$ et $\vec{v} = (x'; y'; z')$:

- **produit scalaire** (un scalaire) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$; $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- **produit vectoriel** (un vecteur, $\perp$ au plan de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, orienté par la règle de la main droite) : $\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy' ; zx' - xz' ; xy' - yx')$; $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$; $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- **produit mixte** (un scalaire) : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$; > 0 : trièdre direct ; < 0 : indirect ; $= 0$: vecteurs coplanaires
- **aires et volumes** : parallélogramme $\mathcal{A} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$; triangle $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$; parallélépipède $\mathcal{V} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$; tétraèdre $\mathcal{V} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$
- **plan** $ax + by + cz + d = 0$: normal $\vec{n} = (a; b; c)$; $d(M, \Pi) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- **droite** par B , dirigée par $\vec{u}$: $d(A, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$; **droites gauches** : $d = \frac{|[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$
- **sphère** de centre Ω et rayon R : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- $\mathcal{D} \parallel \Pi \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$; $\mathcal{D} \perp \Pi \iff \vec{u} \wedge \vec{n} = \vec{0}$

Le produit scalaire mesure une « projection », le produit vectoriel une « rotation », le produit mixte un « volume ». Le premier et le troisième rendent un nombre, le second un vecteur.

0. **Test de positionnement** (sans calculatrice, 15 min). Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant en une ligne.

- (a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un nombre réel.
- (b) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- (c) $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$.
- (d) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{u}$.
- (e) Le vecteur $(2; -1; 3)$ est normal au plan d'équation $2x - y + 3z + 7 = 0$.
- (f) $\|(1; 2; 2)\| = 5$.
- (g) Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, les trois vecteurs engendrent un parallélépipède de volume non nul.
- (h) Deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles se coupent nécessairement.

1. **Le produit vectoriel : ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est *toujours vraie*. Si oui, la démontrer ; si non, produire un **contre-exemple explicite**.

- (a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$.
- (b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ implique $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- (c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.
- (d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.
- (e) Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
- (f) (*Identité de Lagrange.*) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$. La vérifier numériquement sur $\vec{u} = (1; 2; 2)$ et $\vec{v} = (2; -1; 2)$, puis expliquer d'où elle vient (penser à $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$).

2. **Problèmes inverses : trouver le paramètre.**

Il ne s'agit plus de calculer un produit, mais d'imposer une condition géométrique et d'en déduire une inconnue.

- (a) Pour quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (2; \lambda; 1)$ et $\vec{c} = (0; 1; 3)$ sont-ils coplanaires ?

- (b) Pour quelle valeur de μ les vecteurs $\vec{u} = (2; -1; 3)$ et $\vec{v} = (\mu; 2; 1)$ sont-ils *orthogonaux* ?
- (c) Pour quelle valeur de ν les vecteurs $(1; 2; 3)$ et $(2; 4; \nu)$ sont-ils *colinéaires* ? Traiter la question de deux façons : par le produit vectoriel, puis par la proportionnalité des coordonnées.
- (d) La base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ avec $\vec{a} = (1; 1; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 1)$ et $\vec{c} = (1; 0; 1)$ est-elle directe ou indirecte ? Est-elle orthonormée ?
- (e) Construction d'une base orthonormée directe. On part de $\vec{a} = (2; 1; 2)$.
- Construire $\vec{e}_1$ unitaire, colinéaire et de même sens que $\vec{a}$.
 - Vérifier que $(1; -2; 0)$ est orthogonal à $\vec{a}$; en déduire $\vec{e}_2$ unitaire.
 - Construire $\vec{e}_3$ de sorte que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit orthonormée *directe*. Quelle opération garantit à la fois l'orthogonalité et le bon sens ?

3. Aires, volumes et angles : une maille cristalline.

On considère une maille cubique d'arête $a = 0,400$ nm, dont les axes sont portés par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $[hkl]$ la direction du vecteur $h\vec{i} + k\vec{j} + l\vec{k}$, et (hkl) le plan qui lui est perpendiculaire.

- Calculer l'angle entre la diagonale du cube $[111]$ et la diagonale d'une face $[110]$.
- Calculer l'angle entre une arête $[100]$ et la diagonale du cube $[111]$.
- Le plan (111) « coupe » la maille selon le triangle ABC avec $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$ et $C(0; 0; a)$.
 - Montrer que ce triangle est équilatéral et calculer son aire (en nm²), à l'aide du produit vectoriel.
 - En déduire un vecteur unitaire normal au plan (111) , puis l'équation cartésienne de ce plan.
 - Calculer la distance du sommet O au plan (111) (en nm).
- Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ (en nm³) et vérifier que $V = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times d(O, (111))$.

4. Plans et sphères : déterminer une équation à partir d'une propriété.

- Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les trois points $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(0; 3; 1)$.
- Plan médiateur. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants de $A(1; 0; 2)$ et $B(2; 1; 0)$. Indication : traduire $MA = MB$, ou reconnaître le plan passant par le milieu de $[AB]$ et de vecteur normal $\vec{AB}$.
- L'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ est-elle celle d'une sphère ? Si oui, en donner le centre et le rayon.
- Soit la sphère S de centre $\Omega(1; -2; 3)$ et de rayon $R = 5$.
 - Le plan $z = 0$ coupe-t-il S ? Si oui, déterminer le centre et le rayon du cercle d'intersection.
 - Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $M(1; -2; 8)$. Quelle est la direction normale à un plan tangent à une sphère ?

5. Positions relatives : le cas des droites gauches.

Dans le plan, deux droites non parallèles se coupent toujours. Dans l'espace, non : elles peuvent être *gauches* (ni parallèles, ni sécantes).

- Soient $\mathcal{D}_1$ passant par $A(1; 0; 0)$ et dirigée par $\vec{u} = (1; 1; 0)$, et $\mathcal{D}_2$ passant par $B(0; 1; 1)$ et dirigée par $\vec{v} = (0; 1; 1)$.
 - Ces droites sont-elles parallèles ?
 - Calculer le produit mixte $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$. Que peut-on en conclure sur la *coplanarité* des deux droites ? Sont-elles sécantes ?
 - En déduire la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
- Une droite définie comme intersection de deux plans. On considère

$$\Pi_1 : x + y - z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_2 : 2x - y + z - 3 = 0$$

- Ces deux plans sont-ils parallèles ? Justifier avec leurs vecteurs normaux.

- ii. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D} = \Pi_1 \cap \Pi_2$ sans résoudre le système (indication : cette direction est contenue dans les deux plans, donc orthogonale aux deux normales).
- iii. Déterminer un point de $\mathcal{D}$, puis en donner une représentation paramétrique.
- iv. Calculer la distance du point $M(2; 1; -1)$ à la droite $\mathcal{D}$.

6. Applications en physique : quand le produit vectoriel est la loi physique.

- (a) *Solide en rotation.* Un disque tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire $\omega = 30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, décrite par le vecteur rotation $\vec{\omega} = (0; 0; 30)$. La vitesse d'un point M du solide est $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$.
 - i. Calculer $\vec{v}$ pour $M(0,20; 0,10; 0)$ (en m), puis $\|\vec{v}\|$.
 - ii. Vérifier que $\|\vec{v}\| = \omega r$, où r est la distance de M à l'axe.
 - iii. Que vaut $\vec{v}$ pour un point situé sur l'axe? Le retrouver par le calcul.
- (b) *Moment cinétique.* Le point M précédent porte une masse $m = 0,50 \text{ kg}$. Calculer sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, puis son moment cinétique $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}$. Selon quel axe est-il dirigé? Était-ce prévisible?
- (c) *Moment d'un couple.* Deux forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ sont appliquées respectivement en B et C . Montrer que le moment résultant $\vec{M}_A = \vec{AB} \wedge \vec{F} + \vec{AC} \wedge (-\vec{F})$ ne dépend pas du point A choisi. Conclure : pourquoi parle-t-on de « couple » et non de « force »?
- (d) *Flux d'un champ.* Un champ électrique uniforme $\vec{E} = (2; -1; 3) \times 10^3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ traverse une surface plane rectangulaire construite sur les vecteurs $\vec{a} = (0,10; 0; 0) \text{ m}$ et $\vec{b} = (0; 0,20; 0,10) \text{ m}$.
 - i. Déterminer le vecteur surface $\vec{S} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ et son aire $\|\vec{S}\|$.
 - ii. Calculer le flux $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$.
 - iii. Comment orienter la surface pour que le flux soit maximal? nul?

7. Exercice de synthèse : un accéléromètre triaxial.

Un accéléromètre possède trois axes sensibles, portés par les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1; 1; 0), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1; -1; 1), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1; -1; -2)$$

exprimés dans le repère du laboratoire.

- (a) Vérifier que ces trois vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux : ils forment donc une base orthonormée.
- (b) Cette base est-elle directe? Justifier par le produit mixte.
- (c) Vérifier que $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Que serait $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$?
- (d) Le capteur est posé à plat et ne subit que la pesanteur, $\vec{g} = (0; 0; -9,81) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Déterminer les trois valeurs $g_1 = \vec{g} \cdot \vec{e}_1$, $g_2 = \vec{g} \cdot \vec{e}_2$, $g_3 = \vec{g} \cdot \vec{e}_3$ délivrées par les voies du capteur.
- (e) Vérifier que $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = \|\vec{g}\|^2$. Pourquoi cette égalité était-elle garantie par la question (a)? Quel contrôle de bon fonctionnement du capteur cela suggère-t-il en pratique?

Corrigé express — résultats seuls

Seuls les résultats finaux sont donnés, pas le détail des calculs. Valeurs numériques arrondies.

0. (a) **Faux** : c'est un *vecteur* (le produit *scalaire*, lui, donne un nombre). (b) **Vrai**. (c) **Vrai** (permutation circulaire $\vec{i} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{k} \rightarrow \vec{i}$). (d) **Faux** : $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. (e) **Vrai**. (f) **Faux** : $\sqrt{1+4+4} = 3$. (g) **Faux** : produit mixte nul $\Rightarrow$ vecteurs coplanaires $\Rightarrow$ volume nul. (h) **Faux** : dans l'espace, elles peuvent être *gauches* (cf. exercice 5).

1. (a) **Faux** : le produit vectoriel est *anticommutatif*, $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$. Contre-exemple : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ mais $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$. (b) **Faux** : il suffit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient *colinéaires*. Contre-exemple : $\vec{u} = (1; 0; 0)$ et $\vec{v} = (2; 0; 0)$, tous deux non nuls, donnent $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. (c) **Faux** : le produit vectoriel n'est *pas associatif*. Contre-exemple : $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$, tandis que $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}$. Les parenthèses sont donc *obligatoires*. (d) **Vrai** : c'est l'invariance du produit mixte par permutation circulaire, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$. (e) **Faux** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ équivaut à $\vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$, donc $\vec{v} - \vec{w}$ est seulement *colinéaire* à $\vec{u}$. Contre-exemple : $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$: les deux produits valent $\vec{k}$, et pourtant $\vec{v} \neq \vec{w}$. On ne « simplifie » pas par $\vec{u}$. (f) **Vrai**. Vérification : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (6; 2; -5)$ donc $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = 65$ et $65 + 4^2 = 81 = 3^2 \times 3^2$. Origine : $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta + \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2 \theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

2. (a) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 3\lambda - 15 = 0$, d'où $\lambda = 5$. (b) $2\mu - 2 + 3 = 0$, d'où $\mu = -\frac{1}{2}$. (c) $v = 6$ (le produit vectoriel $(1; 2; 3) \wedge (2; 4; v) = (2v - 12; 6 - v; 0)$ est nul pour $v = 6$; par proportionnalité, le rapport vaut 2 sur les deux premières coordonnées, donc $v = 2 \times 3$). (d) $\vec{a} \wedge \vec{b} = (1; -1; 1)$ et $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 2 > 0$: base **directe**. Elle n'est *pas* orthonormée : $\|\vec{a}\| = \sqrt{2} \neq 1$ et $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \neq 0$. (e) i. $\|\vec{a}\| = 3$, donc $\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(2; 1; 2)$. ii. $(2; 1; 2) \cdot (1; -2; 0) = 2 - 2 + 0 = 0$; de norme $\sqrt{5}$, d'où $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1; -2; 0)$. iii. $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4; 2; -5)$. C'est le **produit vectoriel** qui fait tout le travail : il fournit un vecteur automatiquement orthogonal aux deux premiers, unitaire ici car $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ sont unitaires, et orienté de sorte que le trièdre soit direct.

3. (a) $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où $\theta \approx 35,3^\circ$. (b) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\theta \approx 54,7^\circ$ (l'angle « tétraédrique » classique). (c) i. $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$: le triangle est *équilatéral*. $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = a^2(1; 1; 1)$, d'où $\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \approx 0,139 \text{ nm}^2$. ii. $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1)$; plan (111) : $x + y + z - a = 0$. iii. $d(O, (111)) = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0,231 \text{ nm}$. (d) $\mathcal{V} = \frac{1}{6}a^3 \approx 1,07 \times 10^{-2} \text{ nm}^3$; vérification : $\frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{6}$: cohérent.

4. (a) $\vec{AB} = (1; 1; -2)$, $\vec{AC} = (-1; 3; -1)$, d'où $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (5; 3; 4)$ et le plan $5x + 3y + 4z - 13 = 0$. (b) Le milieu de $[AB]$ est $I(1,5; 0,5; 1)$ et $\vec{AB} = (1; 1; -2)$; le plan médiateur est $x + y - 2z = 0$. (c) Oui : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$, sphère de centre $\Omega(1; -2; 3)$ et de rayon $R = 3$. (d) i. $d(\Omega, \{z=0\}) = 3 < 5$: le plan coupe la sphère selon un *cercle* de centre $(1; -2; 0)$ (projeté de Ω) et de rayon $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. ii. $\vec{\Omega M} = (0; 0; 5)$, de norme $5 = R$: M est bien sur la sphère. Le plan tangent en M est *orthogonal au rayon* $\vec{\Omega M}$, donc de normale $(0; 0; 1)$: $z = 8$.

5. (a) i. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1; -1; 1) \neq \vec{0}$: les droites ne sont *pas* parallèles. ii. $\vec{AB} = (-1; 1; 1)$ et $[\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas coplanaires, donc les droites *ne sont pas dans un même plan*. Elles ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont **gauches**. iii. $d = \frac{|\vec{AB}|}{\|(\vec{u} \wedge \vec{v})\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$.

(b) i. $\vec{n}_1 = (1; 1; -1)$ et $\vec{n}_2 = (2; -1; 1)$ ne sont pas colinéaires : les plans ne sont pas parallèles, ils se coupent bien selon une droite. ii. $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (0; -3; -3)$, soit un directeur $\vec{d} = (0; 1; 1)$. iii. En additionnant les deux équations : $3x - 4 = 0$, d'où $x = \frac{4}{3}$, puis $y = z - \frac{1}{3}$. Représentation : $x = \frac{4}{3}$, $y = t - \frac{1}{3}$, $z = t$ (le directeur $(0; 1; 1)$ apparaît bien). iv. Avec $P(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$: $\vec{PM} = (\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -1)$, $\vec{PM} \wedge \vec{d} = (\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, d'où $d(M, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{57}/3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{114}}{6} \approx 1,78$.

6. (a) i. $\vec{v} = (0; 0; 30) \wedge (0,20; 0,10; 0) = (-3; 6; 0) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{45} \approx 6,71 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. ii. $r = \sqrt{0,20^2 + 0,10^2} \approx 0,224 \text{ m}$ et $\omega r \approx 6,71$: cohérent (seule la distance à l'axe intervient, pas la coordonnée z). iii. Sur l'axe, $\vec{OM}$ est colinéaire à $\vec{\omega}$, donc $\vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \vec{0}$: les points de l'axe sont *immobiles*. (b) $\vec{p} = (-1,5; 3; 0) \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\vec{L}_O = (0; 0; 0,75) \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$: porté par (Oz) , c'est-à-dire *par l'axe de rotation* — prévisible, puisque $\vec{OM}$ et $\vec{p}$ sont tous deux dans le plan (xOy) , et leur produit vectoriel lui est donc orthogonal. (c) $\vec{M}_A = \vec{AB} \wedge \vec{F} - \vec{AC} \wedge \vec{F} = (\vec{AB} - \vec{AC}) \wedge \vec{F} = \vec{CB} \wedge \vec{F}$: le point A a *disparu* du résultat. Le moment d'un couple est le même en tout point de l'espace : le couple ne « pousse » pas (résultante $\vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$), il ne fait que *tourner*. C'est une action mécanique de rotation pure — d'où le nom. (d) i. $\vec{S} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (0; -0,010; 0,020) \text{ m}^2$, d'où $\|\vec{S}\| = \sqrt{5} \times 10^{-2} \approx 0,0224 \text{ m}^2$. ii. $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0 + 10 + 60 = 70 \text{ V}\cdot\text{m}$.

iii. Le flux est *maximal* quand $\vec{S} \parallel \vec{E}$ (surface *perpendiculaire* au champ) et *nul* quand $\vec{S} \perp \vec{E}$ (surface *parallèle* au champ : aucune ligne de champ ne la traverse).

7. (a) $\|\vec{e}_1\|^2 = \frac{1+1}{2} = 1$, $\|\vec{e}_2\|^2 = \frac{1+1+1}{3} = 1$, $\|\vec{e}_3\|^2 = \frac{1+1+4}{6} = 1$; $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1-1+0}{\sqrt{6}} = 0$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \frac{1-1+0}{\sqrt{12}} = 0$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \frac{1+1-2}{\sqrt{18}} = 0$: base *orthonormée*. (b) $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = +1 > 0$: base orthonormée **directe**. (c) $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; -1; -2) = \vec{e}_3$; et $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$ (anticommutativité). (d) $g_1 = 0$; $g_2 = -\frac{9,81}{\sqrt{3}} \approx -5,66 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $g_3 = \frac{2 \times 9,81}{\sqrt{6}} \approx +8,01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. (e)

$0 + 32,08 + 64,16 = 96,24 \approx 9,81^2$. L'égalité est garantie par le *théorème de Pythagore généralisé* : dans une base orthonormée, la norme d'un vecteur est la racine de la somme des carrés de ses composantes. En pratique, un capteur triaxial au repos doit donc toujours délivrer $\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} = g \approx 9,81$: c'est un **test d'auto-vérification** (et d'étalonnage) immédiat, quelle que soit l'orientation du boîtier.