

Outils mathématiques 1 — TD 1 : géométrie dans le plan

Base d'exercices supplémentaires — entraînement en autonomie

B.U.T.1 Mesures Physiques — socle commun (bacs généraux et technologiques)

Ces énoncés ne seront pas corrigés en TD. Ils portent sur les *mêmes notions* que la feuille de TD, mais posent des questions de *nature différente* : problèmes inverses (trouver le paramètre), validation de propriétés par contre-exemples, reconnaissance de configurations, lieux géométriques, nouveaux contextes physiques. Le corrigé express, en fin de document, permet l'autocorrection.

Boîte à outils. Pour $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$ dans un repère orthonormé :

- produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$; $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- déterminant : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$; $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$
- norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; aire du triangle ABC : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$
- droite $ax + by + c = 0$: normal $\vec{n} = (a; b)$, directeur $\vec{u} = (-b; a)$; distance d'un point M :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
- droites de coefficients directeurs m, m' : parallèles $\iff m = m'$; perpendiculaires $\iff m m' = -1$
- cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$; tangente en T : perpendiculaire au rayon $\vec{\Omega T}$
- barycentre : $\vec{OG} = \frac{1}{\sum_i p_i} \sum_i p_i \vec{OM_i}$ (les poids p_i peuvent être négatifs)

Le produit scalaire donne $|\theta|$; le déterminant donne le signe de θ . Il faut les deux.

0. **Test de positionnement** (sans calculatrice, 15 min). Répondre par *vrai* ou *faux*, en justifiant en une ligne.

- (a) Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.
- (b) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- (c) Deux droites de coefficients directeurs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $m m' = 1$.
- (d) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ équivaut à : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- (e) L'équation $x^2 + y^2 = -4$ est celle d'un cercle de rayon 2.
- (f) Le vecteur $(3; -2)$ est normal à la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$.
- (g) $\|(3; 4)\| = 7$.
- (h) L'aire du triangle ABC vaut $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$.

1. **Produit scalaire et déterminant : ce qui est vrai, ce qui ne l'est pas.**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est *toujours vraie*. Si oui, la démontrer; si non, produire un **contre-exemple explicite**.

- (a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{v}, \vec{u})$.
- (b) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$.
- (c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
- (d) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$. Quel théorème classique retrouve-t-on lorsque $\vec{u} \perp \vec{v}$?
- (e) (*Identité de Lagrange, version plane.*) $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \det(\vec{u}, \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$. La vérifier sur $\vec{u} = (3; 1)$ et $\vec{v} = (1; 2)$, puis expliquer d'où elle vient (penser à $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$).

2. **Problèmes inverses : trouver le paramètre.**

Il ne s'agit plus de calculer, mais d'imposer une condition géométrique et d'en déduire une inconnue.

- (a) Pour quelle valeur de λ les vecteurs $\vec{u} = (3; \lambda)$ et $\vec{v} = (2; -4)$ sont-ils *orthogonaux*? Pour quelle valeur sont-ils *colinéaires*?
- (b) Pour quelle valeur de m les droites d'équations $y = (m - 1)x + 2$ et $y = 3x - 1$ sont-elles *parallèles*? *perpendiculaires*?

- (c) Pour quelle(s) valeur(s) de k le point $A(2; k)$ appartient-il au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$? Commencer par mettre l'équation sous forme canonique et interpréter géométriquement le nombre de solutions.
- (d) Pour quelle(s) valeur(s) de k la droite d'équation $y = x + k$ est-elle tangente au cercle de centre $\Omega(1; -1)$ et de rayon 2? Indication : une droite est tangente à un cercle si et seulement si la distance du centre à la droite vaut exactement le rayon. Combien de solutions trouve-t-on, et pourquoi était-ce prévisible?

3. Reconnaître une configuration, décrire un lieu géométrique.

- (a) On donne $A(0; 0)$, $B(4; 3)$, $C(9; 3)$ et $D(5; 0)$. Déterminer la nature exacte du quadrilatère $ABCD$ (parallélogramme? losange? rectangle? carré?). Chaque réponse doit être justifiée par un calcul : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$? normes égales? produit scalaire nul? Vérifier ensuite que les diagonales sont perpendiculaires, et calculer l'aire.
- (b) On donne $A(-1; 2)$, $B(3; 0)$ et $C(5; 4)$. Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle, en précisant en quel sommet. Calculer son aire.
- (c) En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC . Indication : où se trouve le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle?
- (d) Lieu géométrique. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ (avec A et C ci-dessus). Reconnaître cet ensemble, et vérifier que B lui appartient. Quel théorème de collège vient-on de redémontrer?
- (e) Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$, de deux façons : en traduisant $MA = MB$, puis en utilisant le milieu et le vecteur normal.



4. Distances, tangences, positions relatives.

- (a) Calculer la distance du point $P(4; 1)$ à la droite d'équation $3x - 4y + 2 = 0$.
- (b) En déduire l'équation du cercle de centre P tangent à cette droite.
- (c) Déterminer l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $T(3; 4)$. Vérifier d'abord que T appartient bien au cercle.
- (d) Étudier la position relative de la droite $y = x + 1$ et du cercle $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$: d'abord sans résoudre, en comparant une distance à un rayon ; puis en déterminant les points d'intersection.
- (e) Deux cercles ont pour équations $x^2 + y^2 = 10$ et $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 10$.
- Donner leurs centres et rayons. Sont-ils sécants? Comparer la distance des centres à $R_1 + R_2$ et $|R_1 - R_2|$.
 - Montrer que la soustraction membre à membre des deux équations donne une droite (appelée axe radical). En déduire les points d'intersection.

5. Barycentres : problèmes inverses et centres de masse.

- (a) *Trouver les poids.* Soient $A(1; 2)$ et $B(5; -2)$. Déterminer les poids p_A et p_B , avec $p_A + p_B = 1$, tels que le barycentre soit le point $G(2; 1)$. Vérifier la cohérence sur les deux coordonnées.
- (b) *Centre de gravité d'un triangle.* Soient $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $C(3; 6)$. Calculer l'isobarycentre G , puis le milieu A' de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$. Que vient-on de démontrer ?
- (c) *Plaque trouée (poids négatifs).* Une plaque homogène rectangulaire occupe le domaine $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 4$ (en cm). On y découpe un carré de côté 2 cm dont les sommets opposés sont $(5; 1)$ et $(7; 3)$.
- Donner le centre de gravité et l'aire de la plaque *pleine*, puis ceux du carré *découpé*.
 - En traitant le trou comme une masse *négative*, déterminer le centre de gravité G de la plaque trouée.
 - Le résultat est-il cohérent avec la symétrie du problème ?

6. Applications en physique.

- (a) *Équilibre d'un point matériel.* Une lampe de masse $m = 5,0$ kg est suspendue au plafond par deux câbles : le câble 1 fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale, le câble 2 un angle $\beta = 45^\circ$, de part et d'autre de la verticale. On prendra $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
- Faire un schéma et écrire les coordonnées des trois forces dans un repère orthonormé.
 - Traduire l'équilibre ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) par un système de deux équations, puis calculer les tensions T_1 et T_2 .
 - Lequel des deux câbles est le plus sollicité ? Était-ce prévisible ?
- (b) *Représentation de Fresnel — circuit RLC série.* On mesure les valeurs efficaces aux bornes de chaque composant : $V_R = 12 \text{ V}$, $V_L = 9 \text{ V}$, $V_C = 4 \text{ V}$. La tension v_R est en phase avec le courant (référence des phases), v_L est en avance de 90° et v_C en retard de 90° .
- Représenter les trois vecteurs de Fresnel et déterminer la valeur efficace V de la tension totale $v = v_R + v_L + v_C$, ainsi que sa phase φ .
 - Le circuit est-il globalement *inductif* ou *capacitif* ? La tension est-elle en avance ou en retard sur le courant ?
 - Que faudrait-il modifier pour que le circuit soit à la *résonance*, c'est-à-dire pour que v soit en phase avec le courant ? Que vaudrait alors V ?
 - Vérifier que $V \neq V_R + V_L + V_C$. Pourquoi les valeurs efficaces ne s'additionnent-elles pas ?

7. Exercice de synthèse : localisation par trilatération.

Trois balises fixes émettent un signal : $B_1(0; 0)$, $B_2(8; 0)$ et $B_3(4; 6)$ (coordonnées en mètres). Un capteur mobile M mesure sa distance à chaque balise par temps de vol.

- Le capteur mesure $d_1 = 5$ m et $d_2 = 5$ m. Écrire les équations des deux cercles correspondants, puis déterminer les positions possibles de M .
- On trouve *deux* solutions. Interpréter géométriquement cette ambiguïté : de quelle symétrie s'agit-il ?
- La troisième balise mesure $d_3 = 3$ m. Lever l'ambiguïté et donner la position de M . *Conclusion : combien de balises non alignées faut-il, au minimum, pour localiser un point du plan sans ambiguïté ?*
- Sous quel angle $\theta = (\overrightarrow{MB_1}; \overrightarrow{MB_2})$ le capteur « voit-il » les deux premières balises ? Préciser le signe de cet angle à l'aide du déterminant.
- Calculer l'aire du triangle MB_1B_2 de deux façons : par le déterminant, puis par la formule « base $\times$ hauteur $/ 2$ ».

Corrigé express — résultats seuls

Seuls les résultats finaux sont donnés, pas le détail des calculs. Valeurs numériques arrondies.

0. (a) **Faux** : c'est un *nombre* (un scalaire). (b) **Vrai**. (c) **Faux** : $mm' = -1$. (d) **Vrai**. (e) **Faux** : une somme de carrés ne peut être négative $\Rightarrow$ *ensemble vide*. (f) **Vrai**. (g) **Faux** : $\sqrt{9+16} = 5$. (h) **Faux** : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$ — il manque le facteur $\frac{1}{2}$ et la valeur absolue (une aire est positive).

1. (a) **Faux** : le déterminant est *antisymétrique*, $\det(\vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v})$. Contre-exemple : $\det((1;0), (0;1)) = 1$ mais $\det((0;1), (1;0)) = -1$. C'est bien pourquoi le déterminant, et non le produit scalaire, porte l'orientation. (b) **Faux** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$ signifie seulement que $\vec{v} - \vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Contre-exemple : $\vec{u} = (1;0)$, $\vec{v} = (1;1)$, $\vec{w} = (1;5)$ donnent $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 1$ avec $\vec{v} \neq \vec{w}$. On ne simplifie pas par $\vec{u}$. (c) **Faux** (inégalité triangulaire : on a seulement $\leq$, avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens). Contre-exemple : $\vec{u} = (1;0)$, $\vec{v} = (0;1)$: $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{2} \approx 1,41$, alors que $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 2$. (d) **Vrai** (développement de $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$). Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, le double produit s'annule et il reste $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$: c'est le **théorème de Pythagore**. (e) **Vrai**. Vérification : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 5$, donc $25 + 25 = 50$; et $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 = 10 \times 5 = 50$. Origine : $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

2. (a) Orthogonaux : $6 - 4\lambda = 0$, soit $\lambda = \frac{3}{2}$; colinéaires : $-12 - 2\lambda = 0$, soit $\lambda = -6$. (b) Parallèles : $m - 1 = 3$, soit $m = 4$; perpendiculaires : $3(m - 1) = -1$, soit $m = \frac{2}{3}$. (c) Forme canonique : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$, cercle de centre $(2; -1)$ et de rayon $\sqrt{10} \approx 3,16$. Pour $x = 2$ (l'abscisse du centre), la droite verticale passe par le centre : elle coupe donc le cercle en deux points. $k^2 + 2k - 9 = 0$ donne $k = -1 \pm \sqrt{10}$, soit $k \approx 2,16$ ou $k \approx -4,16$ (ce sont bien $y_{\Omega} \pm R$). (d) $d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{|2+k|}{\sqrt{2}} = 2$ donne $|2+k| = 2\sqrt{2}$, d'où $k = -2 \pm 2\sqrt{2}$, soit $k \approx 0,83$ ou $k \approx -4,83$. Deux solutions : il existe deux tangentes de pente 1 au cercle, une de chaque côté.

3. (a) $\vec{AB} = (4;3) = \vec{DC}$: *parallélogramme*. $\|\vec{AB}\| = 5$ et $\|\vec{BC}\| = \|(5;0)\| = 5$: côtés consécutifs égaux, donc **losange**. Mais $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 20 \neq 0$: ce n'est ni un rectangle, ni un carré. Diagonales : $\vec{AC} = (9;3)$ et $\vec{BD} = (1;-3)$, avec $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 9 - 9 = 0$: elles sont bien perpendiculaires (propriété caractéristique du losange). Aire = $|\det(\vec{AB}, \vec{AD})| = |4 \times 0 - 3 \times 5| = 15$ (contrôle : base $\times$ hauteur = $5 \times 3 = 15$). (b) $\vec{AB} = (4;-2)$, $\vec{BC} = (2;4)$: $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 8 - 8 = 0$ (angle droit en B) et $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{20}$: triangle **isocèle rectangle en B**. Aire = $\frac{1}{2} \times 20 = 10$. (c) Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [AC], soit $\Omega(2;3)$, et $R = \frac{1}{2} \|\vec{AC}\| = \sqrt{10} \approx 3,16$. Cercle : $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$. (d) $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = 0$ décrit le **cercle de diamètre [AC]**, c'est-à-dire exactement le cercle trouvé en (c) : centre $(2;3)$, rayon $\sqrt{10}$. Vérification pour $B(3;0)$: $(3-2)^2 + (0-3)^2 = 10$: $B \in \mathcal{E}$. On vient de redémontrer que tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit. (e) Milieu de [AB] : $(1;1)$; $\vec{AB} = (4;-2)$. Médiatrice : $4(x-1) - 2(y-1) = 0$, soit $2x - y - 1 = 0$.

4. (a) $d = \frac{|12 - 4 + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$. (b) Le cercle tangent a pour rayon cette distance : $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$. (c) $3^2 + 4^2 = 25$: T est bien sur le cercle. La tangente est perpendiculaire au rayon $\vec{OT} = (3;4)$, qui en est donc un vecteur normal : $3x + 4y = 25$. (d) $d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41 < R = 2$: la droite est *sécante* (deux points). En substituant $y = x + 1$: $2x^2 - 4x = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 2$, soit les points $(0;1)$ et $(2;3)$. (e) i. $\Omega_1(0;0)$, $\Omega_2(4;2)$, $R_1 = R_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$; $\Omega_1\Omega_2 = \sqrt{20} \approx 4,47$. On a $|R_1 - R_2| = 0 < 4,47 < R_1 + R_2 \approx 6,32$: les cercles sont *sécants*. ii. La soustraction élimine les termes x^2 et y^2 : il reste $8x + 4y - 20 = 0$, soit $2x + y - 5 = 0$ (axe radical). En reportant $y = 5 - 2x$ dans le premier cercle : $x^2 - 4x + 3 = 0$, d'où $x = 1$ ou $x = 3$, soit les points $(1;3)$ et $(3;-1)$.

5. (a) $p_A \cdot 1 + p_B \cdot 5 = 2$ avec $p_A + p_B = 1$ donne $p_A = \frac{3}{4}$, $p_B = \frac{1}{4}$. Contrôle sur y : $\frac{3}{4}(2) + \frac{1}{4}(-2) = 1$: cohérent. (b) $G(3;2)$ et $A'(4,5;3)$; $\vec{AG} = (3;2)$ et $\vec{AA'} = (4,5;3)$, donc $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$. On vient de démontrer que le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet. (c) i. Plaque pleine : aire 32 cm^2 , centre $(4;2)$. Carré découpé : aire 4 cm^2 , centre $(6;2)$. ii. Barycentre de $(4;2)$ affecté de +32 et de $(6;2)$ affecté de -4 :

$$G = \frac{32(4;2) - 4(6;2)}{32 - 4} = \left(\frac{104}{28}; \frac{56}{28}\right) = \left(\frac{26}{7}; 2\right) \approx (3,71; 2)$$

iii. Oui : la plaque et le trou sont tous deux symétriques par rapport à la droite $y = 2$, donc $y_G = 2$ nécessairement. Et le trou étant situé à droite du centre, retirer de la matière de ce côté déplace G vers la gauche : $3,71 < 4$. Cohérent.

6. (a) i. Avec x horizontal et y vertical ascendant : $\vec{T}_1 = T_1(-\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\vec{T}_2 = T_2(\cos \beta; \sin \beta)$, $\vec{P} = (0; -mg)$. ii. Le système $\{-T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0; T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = mg\}$ donne $T_1 \approx 35,9 \text{ N}$ et $T_2 \approx 44,0 \text{ N}$ (avec $mg =$

49,05 N). iii. C'est le câble 2 (le plus *redressé*, $45^\circ > 30^\circ$) qui est le plus sollicité : il « porte » davantage la composante verticale du poids.

(b) i. $\vec{v}_R = (12; 0)$, $\vec{v}_L = (0; 9)$, $\vec{v}_C = (0; -4)$, d'où $\vec{v} = (12; 5)$: $V = \sqrt{144 + 25} = \boxed{13 \text{ V}}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \approx +22,6^\circ$. ii. $V_L > V_C$ donc la composante verticale est positive : le circuit est *inductif*, et la tension est en **avance** de $22,6^\circ$ sur le courant. iii. À la résonance, $\vec{v}_L$ et $\vec{v}_C$ se compensent exactement ($V_L = V_C$) : il faudrait augmenter V_C jusqu'à 9 V, par exemple en modifiant C (ou la fréquence). On aurait alors $\vec{v} = \vec{v}_R$, donc $V = V_R = 12 \text{ V}$ et $\varphi = 0$. *À la résonance, la tension totale est plus faible qu'avant : c'est contre-intuitif si l'on additionne naïvement les valeurs efficaces.* iv. $V_R + V_L + V_C = 25 \text{ V}$, alors que $V = 13 \text{ V}$. Les valeurs efficaces ne s'additionnent pas parce que les tensions ne sont pas *en phase* : ce sont des *vecteurs* que l'on additionne, pas des nombres. On retrouve exactement l'inégalité triangulaire de l'exercice 1(c).

7. (a) $x^2 + y^2 = 25$ et $(x - 8)^2 + y^2 = 25$. La soustraction donne $16x - 64 = 0$, soit $x = 4$, puis $y^2 = 9$: $M_+(4; 3)$ ou $M_-(4; -3)$. (b) Les deux solutions sont symétriques par rapport à la droite (B_1B_2) , c'est-à-dire l'axe (Ox) : deux distances ne suffisent pas à distinguer « au-dessus » de « en dessous ». (c) $M_+B_3 = 3 \text{ m}$ et $M_-B_3 = 9 \text{ m}$: la mesure $d_3 = 3$ désigne $\boxed{M(4; 3)}$. Il faut donc **trois balises non alignées** pour lever toute ambiguïté dans le plan (le même raisonnement en donne quatre dans l'espace — c'est le principe du GPS). (d) $\overrightarrow{MB_1} = (-4; -3)$ et $\overrightarrow{MB_2} = (4; -3)$: $\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MB_2} = -16 + 9 = -7$, $\|\overrightarrow{MB_1}\| = \|\overrightarrow{MB_2}\| = 5$, donc $\cos \theta = -\frac{7}{25} = -0,28$ et $|\theta| \approx 106,3^\circ$. $\det(\overrightarrow{MB_1}, \overrightarrow{MB_2}) = 12 + 12 = 24 > 0$: l'angle orienté est *positif*, $\theta \approx +106,3^\circ$. (e) $\det(\overrightarrow{B_1M}, \overrightarrow{B_1B_2}) = \det((4; 3), (8; 0)) = -24$, d'où $\mathcal{A} = 12 \text{ m}^2$; contrôle : base $B_1B_2 = 8$, hauteur $= y_M = 3$, donc $\frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 \text{ m}^2$.