Année 2017-2018
L3 — SV Concours
HLMA509 Mathématiques

# ÉPREUVE ÉCRITE (15 JANVIER 2018)
# (DURÉE : 1H30)

*N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1.** Soit $a$ un nombre réel. On considère les sous-espaces vectoriels $F, G$ de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z = 0, z + t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1, 0, a, 2), (a, 0, 4, -4)).$$

(1) Déterminer une base et la dimension de $F$.

(2) Selon la valeur de $a$, déterminer la dimension de $G$.

(3) Montrer que $G$ est contenu dans $F$ si et seulement si $a = -2$.

(4) Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $a \neq -2$. Dans ce cas, expliciter la décomposition d'un vecteur quelconque $(x, y, z, t)$ comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$.

**Exercice 2.** Pour chaque nombre réel $m$, on définit une application linéaire $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$f_m(x, y, z) = (x + z, -x + 2y + z, (2 - m)x + (m - 2)y + mz).$$

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1) Écrire la matrice $A_m$ de $f_m$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

(2) Calculer $f_m(1, 1, 0)$. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de $f_m$ ?

(3) Déterminer toutes les valeurs propres de $f_m$.

(4) Quelles sont les valeurs de $m$ pour lesquelles l'endomorphisme $f_m$ est bijectif ?

(5) Montrer que $f_m$ est diagonalisable lorsque $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

(6) On s'intéresse dans cette question au cas où $m = 1$.

  (a) Déterminer les sous-espaces propres de $f_1$.

  (b) L'endomorphisme $f_1$ est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

(7) On s'intéresse dans cette question au cas où $m = 2$.

  (a) Déterminer les sous-espaces propres de $f_2$.

  (b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $f_2$. Quelle est la matrice de $f_2$ dans la base $\mathcal{B}$ ?

  (c) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P$ (que l'on explicitera, ainsi que son inverse $P^{-1}$) et une matrice diagonale $\Delta$ (que l'on explicitera) telles que $\Delta = P^{-1}A_2P$.
  *N.B. On rappelle que $A_2$ est la matrice de $f_2$ dans la base canonique.*

  (d) En déduire l'expression de $f^k(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

**Solution succinte**

1 (1) Une base de $F$ est, par exemple, $((1, 2, 0, 0), (1, 1, -1, 1))$. La dimension de $F$ est donc 2.

(2) Par définition, $G$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs non nuls $u = (1, 0, a, 2)$ et $v = (a, 0, 4, -4)$. Donc $F$ est de dimension 2 si ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, et de dimension 1 s'ils le sont. On voit facilement que les vecteurs sont colinéaires si et seulement si $a = -2$.

(3) On raisonne par double implication :

— Si $a = -2$, alors le vecteur $u$ vérifie les équations qui définissent $F$, donc il appartient à $F$. Donc $G = \mathrm{Vect}(u)$ est contenu dans $F$.

— Si $a \neq -2$, alors le vecteur $u$ ne vérifie pas la deuxième équation définissant $F$. Donc il n'appartient pas à $F$, et donc $G$ n'est pas contenu dans $F$.

(4) On raisonne par double implication :

— Si $a = -2$, alors $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3$ n'est pas égal à $4 = \dim \mathbb{R}^4$, donc $F$ et $G$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

— Si $a \neq -2$, alors $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Pour montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Pour cela, considérons un vecteur de $G$ : il est de la forme $\alpha u + \beta v = (\alpha + a\beta, 0, \alpha a + 4, 2 - 4\beta)$. Pour que ce vecteur appartienne également à $F$, il faut qu'il vérifie les deux équations qui définissent $F$. On obtient ainsi un système linéaire de deux équations en $\alpha, \beta$. On montre que $\alpha = \beta = 0$ est la seule solution de ce système. Donc le vecteur nul est le seul vecteur de $F \cap G$, ce qu'il fallait démontrer.

2 (1) $A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{bmatrix}$.

(2) On trouve $f_m(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$. Donc $\lambda = 1$ est valeur propre de $f_m$, et $(1, 1, 0)$ en est un vecteur propre associé.

(3) Le calcul du polynôme caractéristique $\chi_m(\lambda) = \det(A_m - \lambda I_3)$ donne $\chi_m(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(m-\lambda)$. Le fait de savoir que 1 est valeur propre, donc racine de $\chi_m$, permet d'obtenir facilement cette factorisation. Les valeurs propres de $f_m$ sont donc $1$, $2$ et $m$.

(4) L'endomorphisme $f_m$ est bijectif si et seulement s'il est injectif (propriété fondamentale des endomorphismes, conséquence du théorème du rang), ce qui équivaut à dire que 0 n'en est pas valeur propre. Par conséquent, $f_m$ est bijectif si et seulement si $m \neq 0$. Autre méthode : calculer le déterminant de $A_m$...

(5) Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, alors $f_m$ possède 3 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

(6) (a) Lorsque $m = 1$, l'endomorphisme $f_m$ ne possède que deux valeurs propres, 1 et 2. En résolvant successivement les équations $f(x, y, z) = (x, y, z)$ puis $f(x, y, z) = 2(x, y, z)$, on obtient les sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$.

(b) La somme des dimensions des sous-espaces propres est $1 + 1 = 2$. Elle n'est pas égale à $3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc l'endomorphsime $f_1$ n'est pas diagonalisable.

(7) (a) Lorsque $m = 2$, l'endomorphisme $f_m$ ne possède que deux valeurs propres, 1 et 2. En résolvant successivement les équations $f(x, y, z) = (x, y, z)$ puis $f(x, y, z) = 2(x, y, z)$, on obtient les sous-espaces propres $E_1 = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(b) En réunissant les vecteurs d'une base de $E_1$ et ceux d'une base de $E_2$, on sait que l'on obtient une famille libre (résultat du cours). Par conséquent, la famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$ est libre. Comme elle est constituée de 3 vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$, constituée de vecteurs propres. Par définition de « matrice d'un endomorphisme dans une base », la matrice de $f_2$ dans cette base $\mathcal{B}$ est

$$\Delta := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Notons, de manière générale, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},C}$ la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $C$ (ses colonnes sont constituées des décompositions des vecteurs de $C$ dans $\mathcal{B}$).

D'après la formule de changement de base, les matrices de $f_2$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ sont reliées par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f_2) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} .$$

Il suffit donc de poser $P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}$ pour obtenir la relation voulue. Par définition de « matrice de passage », on a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule son inverse $P^{-1}$, par exemple en résolvant le système $PX = Y$, et on trouve

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) On en déduit que $A_2 = P\Delta P^{-1}$, puis que $A_2^k = P\Delta^k P$, ce qui permet de trouver $A^k$, et de là l'expression de $f_k$ (dont $A^k$ est la matrice dans la base canonique).