UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L1 - ANALYSE 2 (HLMA202)
ANNÉE 2017-2018

Feuille d'exercices 2

SUITES CONVERGENTES

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

(a) (u_n) converge vers ℓ,
(b) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall n > x,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$,
(c) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$,
(d) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon$.

Exercice 2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Quelles sont les suites satisfaisant
(a) $\forall\varepsilon \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$?
(b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall\varepsilon > 0,\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$?

Exercice 3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que la suite $(u_{n-2})_{n\geq 2}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 4. En revenant aux définitions, montrer que

(a) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0,
(b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0,
(c) $\left(n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$,
(d) $(-8n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 5. Démontrer le :

THÉORÈME DES GENDARMES : *Soit (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$, alors (v_n) converge vers ℓ.*

Application : trouver les limites de $\left(\dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6. (a) Écrire avec des quantificateurs l'assertion « (u_n) diverge ».
(b) Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $-\infty$. Montrer que (u_n) diverge.

Exercice 8. (a) Soit $a > 0$. Montrer que la suite de terme général $u_n = an$ tend vers $+\infty$.
(b) Montrer que si $u_n \to +\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, alors $v_n \to +\infty$.
(c) Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N},\ (1 + a)^n \geq 1 + an$.
(d) Soit $q > 1$. Déduire de ce qui précède que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est stationnaire.