UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L1 - ANALYSE 2 (HLMA202)
ANNÉE 2017-2018

Feuille d'exercices 1

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SUITES

1 - EXERCICES D'ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1. Trouver deux suites différentes (u_n) et (v_n) telles que
(a) $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, (b) $\forall N \in \mathbb{N},\ \{u_n \mid n \geq N\} = \{v_n \mid n \geq N\}$.

Exercice 2. Avec des quantificateurs, rappeler les définitions de suite croissante, décroissante, bornée, stationnaire, périodique. Parmi ces propriétés, lesquelles sont vérifiées pour les suites dont les termes généraux sont les suivants ?

(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$,
(b) $v_n = 2^n$,
(c) $w_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$,
(d) x_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π,
(e) $y_n = \max(100 - n, 0)$,
(f) $z_n = \min(n - 5, (-1)^n)$.

Exercice 3. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
(a) La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
(b) La suite (u_n) est périodique de période paire.
(c) La suite des termes d'indices pairs de (u_n) est périodique.
(d) La suite (u_n) est majorée.
(e) La suite (u_n) est majorée à partir d'un certain rang.
Démontrer que les assertions (d) et (e) sont en fait équivalentes.

Exercice 4. Quelles sont les suites réelles satisfaisant les assertions suivantes ?

(a) $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq c$,
(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{R},\ u_n \leq c$,
(c) $\forall c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq c$,
(d) $\exists c \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leq c$,
(e) $\forall c \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leq c$,
(f) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{R},\ u_n \leq c$.

2 - EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer rigoureusement que (u_n) est bornée si et seulement si (u_n) est majorée et minorée.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite périodique et croissante. Montrer rigoureusement que (u_n) est constante.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique. Montrer que (u_n) est bornée. Montrer que c'est encore vrai si (u_n) est seulement périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
(a) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ (n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m)$,
(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.

Exercice 9. Démontrer les inégalités triangulaires :
(a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a + b| \leq |a| + |b|$
(b) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ ||a| - |b|| \leq |a - b|$.