HLMA304, Arithmétique
Examen, Première session, janvier 2017

— Durée : 2h —
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'examen.

Les exercices pourront être traités dans n'importe quel ordre. On pourra admettre le résultat d'une question pour aborder les suivantes.

Exercice 1. Résoudre le système de congruence suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 9 & [21] \\ x \equiv 11 & [25] \end{cases}$$

Exercice 2.

(1) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver un inverse de 47 modulo 89.

(2) Résoudre l'équation :

$$47x \equiv 3[89]$$

Exercice 3.

(1) Soient n, a, b, c trois entiers positifs tels que $4n = a^2 + b^2 + c^2$. Montrer que n est aussi une somme de trois carrés

Indication : on pourra considérer les parités respectives de a, b et c.

(2) Montrer qu'aucun entier de la forme $4^m(8k + 7)$ n'est somme de trois carrés.

Indication : on pourra réduire le problème à l'aide du (1), puis travailler dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que X est non vide.

(2) Montrer que le produit de nombres de la forme $4k + 1$ est encore de cette forme.

(3) On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit

$$a = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1.$$

Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k + 3$.

(4) Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Exercice 5.

(1) On souhaite démontrer que 2017 est un nombre premier.

a. Soit $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{2017}$. Montrer que, si 2017 n'est divisible par aucun élément de X, c'est un nombre premier.

b. Trouver l'ensemble X.

c. On admettra que 2017 n'est divisible par aucun des entiers 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Montrer que 2017 est un nombre premier.

(2) Donner le reste de la division euclidienne de 2015^{2016} par 2017.