

HLMA304, Arithmétique
Examen, Deuxième session, avril 2017

— Durée : 2h —

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits durant l'examen.

Les exercices pourront être traités dans n'importe quel ordre. On pourra admettre le résultat d'une question pour aborder les suivantes.

Exercice 1. Trouver l'ensemble des entiers x tels que :

$$\begin{cases} 9x \equiv 12 & [21] \\ x \equiv 2 & [3] \end{cases}$$

Exercice 2.

(1) Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ montrer l'équivalence suivante :

$$a \equiv b [42] \iff \begin{cases} a \equiv b & [2] \\ a \equiv b & [3] \\ a \equiv b & [7] \end{cases}$$

(2) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^7 \equiv n [42]$$

Exercice 3.

Soit p un nombre premier impair, on note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps à p éléments. Si $n \in \mathbb{Z}$, on note \bar{n} la classe de n dans \mathbb{F}_p .

(1) Soient $a, b, c \in \mathbb{F}_p$; montrer que le polynôme

$$X^2 + bX + c \in \mathbb{F}_p[X]$$

possède une racine si et seulement si $\Delta = b^2 - 4c$ est un carré dans \mathbb{F}_p .

(2) Soit $x \in \mathbb{F}_p$. Montrer que, si x est un carré, alors $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

(3) En déduire qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

$$a^2 + ab + b^2$$

est divisible par 7.

Exercice 4.

- (1) Déterminez le pgcd de 2873 et 1001, ainsi que deux entiers relatifs u et v tels que

$$2873u + 1001v = \text{pgcd}(2873, 1001).$$

- (2) Décomposez 2873 et 1001 en facteurs premiers.
(3) Quel est l'ensemble des couples d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$2873u + 1001v = 15?$$

Exercice 5. Vous demandez à un ami de multiplier par 13 le jour de sa naissance, de multiplier par 14 le mois de naissance, et d'additionner ces deux résultats pour former un nombre n qu'il vous communique.

Comment pouvez vous retrouver le jour et le mois de sa naissance ?