

# Méthode des éléments-finis par l'exemple

Daniel Choi<sup>1</sup>

LMNO

Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique

Université de Caen, Bld Maréchal Juin, 14032 Caen Cedex, France

Version Avril 2010

1. [daniel.choi@unicaen.fr](mailto:daniel.choi@unicaen.fr)

Ce document est inspiré d'un cours enseigné en Master Ingénierie Mathématiques et Mécanique à l'université de Caen. Il s'inspire de nombreux ouvrages bien plus complets tels que [Bat96] et [ZT00], ainsi que divers documents de collègues universitaires. Il est destiné aux étudiants en Master de Mathématiques appliquées et Mécanique ainsi qu'aux élèves ingénieur.

Ce document est bien sur incomplet : il manque des chapitres entiers, des démonstrations, des exemples, etc. Toute remarque est la bienvenue, même en ce qui concerne les probablement nombreuses fautes d'orthographe et de Français.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Problème aux limite et formulation variationnelle, quelques exemples . . . . .	11
1.1.1	Problème modèle 1d . . . . .	11
1.1.2	Problème modèle 2d : problème de Dirichlet . . . . .	12
1.1.3	Problème 2d : élasticité plane linéaire . . . . .	12
1.1.4	Problème 2d/3d : problème de Stokes . . . . .	13
1.1.5	Problèmes non-linéaires . . . . .	14
1.1.6	Problèmes dynamiques . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Cadre théorique : espaces de Hilbert et espaces de Sobolev</b>	<b>15</b>
2.1	Espaces de Hilbert . . . . .	16
2.2	Exemples : $\mathbb{L}^2$ et les espaces de Sobolev . . . . .	17
2.2.1	Espace des fonctions de carré intégrable $\mathbb{L}^2$ . . . . .	17
2.2.2	Espaces de Sobolev $H^m$ . . . . .	17
2.2.3	Trace dans un espace de sobolev . . . . .	18
2.3	Représentation de Riesz . . . . .	19
2.4	Théorèmes de projection dans un Hilbert . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Formulation variationnelle</b>	<b>23</b>
3.1	Problème variationnel abstrait : théorème de Lax-Milgram . . . . .	23
3.2	Méthode de Galerkin . . . . .	25
3.3	Méthode de Galerkin en dimension finie . . . . .	27
3.3.1	Premier exemple et exercices . . . . .	27
3.3.2	Elément-finis et méthode de Galerkin . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Éléments-finis par l'exemple : Problèmes 1D</b>	<b>29</b>
4.1	Problème 1D, interpolation $P^1$ . . . . .	30

4.1.1	Maillage SEG2 et interpolation linéaire par morceaux : élément $P^1$ de Lagrange	30
4.1.2	Matrices de l'élément $P^1$	31
4.1.3	Éléments-finis $P^1$ , le système linéaire	32
4.1.4	Construction des matrices : technique d'assemblage	34
4.1.5	Application numérique	35
4.1.6	Estimation d'erreur	38
4.1.7	Programme Scilab	38
4.2	Poutre en flexion, interpolation $P^3$ sur maillage SEG2	39
4.2.1	Le modèle de Bernoulli	39
4.2.2	Principe des travaux virtuels	40
4.2.3	Maillage SEG2 et Interpolation $P^3$	40
4.2.4	Calcul de la matrice rigidité à la flexion	42
4.3	Élément-finis 1D dans le plan, structures en treillis	43
<b>5</b>	<b>Éléments-finis par l'exemple : Problèmes 2D</b>	<b>47</b>
5.1	Exemple 2D sur maillage triangulaire : Problème de Poisson	47
5.1.1	Maillage triangulaire à 3 nœuds et interpolation $P^1$ de Lagrange	48
5.1.2	Matrice de rigidité élémentaire	50
5.1.3	Calcul du second membre	52
5.1.4	Prise en compte des conditions aux limites et résolution	52
5.2	Exemple 2D sur maillage quadrangulaire : Problème de Poisson avec condition de Dirichlet et condition de Neuman	53
5.2.1	Maillage quadrangulaire à 4 nœuds et interpolation linéaire	54
5.2.2	Interpolation linéaire sur un quadrangle	55
5.2.3	Élément de référence et formule de Jacobi	56
5.3	Element MITC4 pour les plaques en flexion	59
<b>6</b>	<b>Éléments-finis par l'exemple : Problèmes 3D</b>	<b>63</b>
6.1	Exemple 3D : Mécanique des milieux continus	63
6.1.1	Élément tétraédriques à 4 nœuds	64
6.1.2	Élément prisme à 6 nœuds	66
6.1.3	Élément cubique à 8 nœuds	69
<b>7</b>	<b>Annexes : Rappels de Mathématiques</b>	<b>71</b>
7.1	Rappels en algèbre linéaire, analyse matricielle	71
7.2	Rappels d'optimisation quadratique	71
7.3	Théorèmes de projection	72
7.4	Intégration numérique de Gauss	73
7.4.1	3 nœuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence	73

7.4.2	7 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence . . . . .	73
7.4.3	4 noeuds d'intégration de Gauss sur un quadrangle de référence . . . . .	74



# CHAPITRE 1

## Introduction

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique de solutions de problèmes aux limites statiques ou dynamiques tels que

- diffusion thermique
- mécanique des milieux continus (solides et fluides)
- électromagnétisme

mais en fait, absolument tous les problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) aux limites.

Il s'agit, comme dans toutes les méthodes numériques, de trouver une approximation discrète. Pour faire bref, d'un problème différentiels aux limites linéaire, on trouve une formulation variationnelle associée équivalente, dont on calcule une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie, ce qui revient à résoudre au final un système linéaire.

L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments : ils sont souvent représentés par un maillage, voir figure 1.1

Historiquement, l'origine de la méthode peut se trouver dans les travaux de Fermat et Bernoulli (1743) avec le calcul des variations, puis il faut attendre le début du XXème siècle avec les progrès en analyse avec la méthode de Galerkin se basant sur des théorèmes de projection dans les espaces de Hilbert.

En 1943 Robert Courant introduit le principe variationnel avec des fonctions de base à support locaux ouvrant la voie à une division d'un domaine considéré en "éléments". Cependant ce n'est qu'avec le développement des ordinateurs que ces travaux trouve leurs applications avec les travaux pionniers de Zienckiewicz et Argyris qui définirent la méthode en 1960.



FIGURE 1.1 – Maillages

Ce qui amène le succès de la méthode et sa puissance est l'apport du calcul matriciel, introduit par un ingénieur civil anonyme. La méthode connaît alors un développement fulgurant accompagné par les progrès de l'informatique.

La méthode des éléments-finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique rigoureuse.

Aujourd'hui, les éléments-finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes d'EDP aux limites comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme.

De nombreux codes industriels (solveurs) existent et sont généralement couplés à un logiciels de CAO<sup>1</sup> ou Computer Aided Design (CAD) en Anglais. Citons Ansys, Abaqus, Robot, LS-dyna, Feap, Code-Aster, Cast3M et bien d'autres.

## Notation et conventions

Dans ce document, nous serons parfois amené à utiliser quelques conventions de notations propres à la mécanique. En particulier nous utiliserons la convention de sommation par rapport aux indices répétés (on lit également *convention d'Einstein*) et nous noterons souvent les dérivées partielles à l'aide d'un indice précédé d'une virgule.

Nous commençons toutefois par quelques notations utilisés dans ce document qui sont du reste tout à fait usuel.

### Notations

Nous n'avons pas cherché à faire dans l'originalité, ainsi dans tout le document  $\mathbb{R}$  désigne l'espace des nombres réels tandis que  $\mathbb{C}$  sera l'espace des nombres complexes.

1. Conception assistée par Ordinateur



Les quantités scalaire seront systématiquement noté en italique, tandis que les objets vectoriels seront noté soit avec une flèche soit en caractère gras :

On désigne généralement par  $f$  ou  $g$  une *fonction scalaire*

Les **objets vectoriels** seront souvent désigné par  $\mathbf{u}$  dont les composantes  $u_i$  sont des quantités scalaires.

Le symbole  $\Omega$  représentera généralement un domaine à bord régulier de  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  en mécanique désigne souvent les nombres 2 ou 3.

### Convention de sommation suivant les indices répétés

La convention d'Einstein sur la sommation sur les indices ou exposants répétés est une convention destiné à alléger les écritures dans les formules mathématiques sans pour autant les rendre ambigu.

La convention implique une sommation sur des termes produits dès lors qu'ils présentent des indice répétés :

Ainsi, par exemple, pour  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$  et  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^\top$ , deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , le produit scalaire :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

où l'on remarque l'indice  $i$  qui apparaît répété, sera noté plus simplement :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i.$$

De même pour un produit de matrices  $C = BA$  :

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} \quad \longrightarrow \quad c_{kj} = b_{ki} a_{ij}.$$

Si un vecteur  $\mathbf{x}$  a pour composantes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dans la base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , on écrit

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

Si on note, dans  $\mathbb{R}^3$  le produit mixte des vecteurs de la base canonique :

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k)$$

On peut écrire le produit mixte de trois vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  par

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k,$$

où on a appliqué la convention sur les trois indices répétés  $i, j$  et  $k$ .

## Notation des dérivées partielles

En mécanique et en mathématiques en général, nous avons souvent affaire à des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ainsi pour alléger les notations on préférera utiliser la notation en indice précédé d'une virgule :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= f_{,x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= u_{i,j} \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} &= u_{i,jk}.\end{aligned}$$

Si on considère une fonction scalaire  $f$  défini sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (à valeur dans  $\mathbb{R}$ ) alors pour toute direction  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_n]^\top$ , on écrit la dérivée de  $f$  dans la direction  $\mathbf{h}$  :

$$\nabla f(x)(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \quad \longrightarrow \quad \nabla f(x)(\mathbf{h}) = f_{,i}(x) h_i.$$

où on a également utilisé la convention de sommation suivant les indices répétés.

## Indices et exposant Grecs ou Latins

Bien que la plupart des théories mathématiques soit présenté dans un espace abstrait de dimension  $n$ , en Mécanique les problèmes sont généralement posés dans les variables d'espace. C'est à dire qu'on travaille en dimension 3 en général et en dimension 2 pour des problèmes plans.

Alors, il est une façon bien commode si un problème est en dimension 2 ou 3 :

- l'utilisation réservée des indices et exposants Grecs en dimension 2,
- l'utilisation réservée des indices et exposants Latins en dimension 3.

Ainsi le système

$$\sigma_{ij,j} + f_j = 0 \quad i = \{1, 2, 3\}$$

identifie immédiatement un problème à trois dimension (avec une sommation sur  $j$ ), tandis que dans

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0 \quad \alpha = \{1, 2\}$$

on reconnait un problème en dimension 2 (avec une sommation sur  $\beta$ ).

## 1.1 Problème aux limites et formulation variationnelle, quelques exemples

Dans cette section nous présentons sans les résoudre quelques problèmes typiques pouvant être résolus par la MEF. Il s'agit systématiquement de problèmes aux limites dont on peut trouver une formulation variationnelle équivalente. Les problèmes de Cauchy ne sont a priori pas résolubles par la MEF, du moins pas de façon directe.

### 1.1.1 Problème modèle 1d

Soit le problème aux limites pour une fonction scalaire définie sur  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned} -ku'' + \alpha u &= f & [0, 1] \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ telle que} \\ \int_{[0,1]} ku'u'^* + \alpha uu^* = \int_{[0,1]} fu^* \quad \forall u^* \in H_0^1([0, 1]) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

On précisera plus tard cette équivalence et l'espace de Sobolev  $H_0^1([0, 1])$ , qui correspond à un espace de fonctions pour lesquelles les intégrales de (1.2) ont un sens et qui satisfont aux conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$ , voir la section 2.2 et plus précisément la proposition 2.2.7.

Ce problème peut modéliser l'équilibre thermique d'une barre chauffée à ses extrémités et plongée dans une pièce maintenue à une température donnée,  $k$  désignant alors le coefficient de diffusion thermique de la barre et  $\alpha$  est un coefficient de perte de chaleur due à la convection de l'air.

Pour  $k = 1$ ,  $\alpha = 1$  et  $f = 1$ , nous traçons sur la figure 1.2 la solution éléments-finis avec une interpolation polynomiale de degré 1 sur une subdivision de  $[0, 1]$  en 3 intervalles (éléments) en comparaison de la solution exacte  $u_{exact}$  du problème (1.1) :

$$u_{exact} = 1 + \frac{1}{e-1}e^x + \frac{e}{e+1}e^{-x}.$$

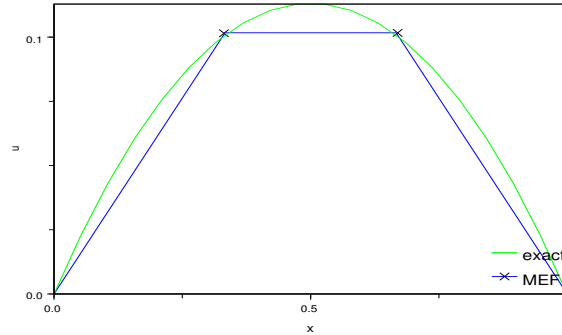


FIGURE 1.2 – La solution exacte et une solution EF (3 éléments) du problème (1.2)

### 1.1.2 Problème modèle 2d : problème de Dirichlet

Soit le problème aux limites pour une fonction scalaire définie sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega \\ u &= 0 & \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.3)$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^* = \int_{\Omega} f u^* \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Ce problème peut modéliser par exemple l'équation d'une membrane d'une membrane soumise à une pression  $f$  et des conditions d'encastrement au bord de la membrane. Ce problème peut également modéliser un problème thermique sans convection, un problème d'électrostatique, ou même un problème d'écoulement d'un fluide irrotationnel incompressible.

### 1.1.3 Problème 2d : élasticité plane linéaire

On considère le *principe des puissances virtuelles* d'un solide élastique en équilibre statique, dont l'une des dimensions étant petite permet une approximation en contrainte approximativement plane, réduisant le problème 3D en un problème 2D. Le solide représenté par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est soumis à une densité surfacique d'effort  $\mathbf{f}$ , est encastré sur une partie  $\Gamma$  du bord,

tandis que le reste est libre de contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_{adm} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \bar{\sigma}(\mathbf{u}) : \bar{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{adm} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où on reconnaît dans le terme de gauche la puissance virtuelles des efforts intérieurs.  $\mathbf{u}$  désigne un déplacement sur  $\Omega$ , il se décompose en deux composantes.

Le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  est défini par la loi de comportement élastique qui le relie au tenseur des déformations (linéarisés)  $\bar{\varepsilon}$  :

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^T).$$

Dans le cas d'un matériau isotrope la loi de comportement est la loi de Hooke et s'écrit :

$$\bar{\sigma} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \text{tr}(\bar{\varepsilon}(\mathbf{u})) I + \frac{E}{1 + \nu} \bar{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où  $E$  désigne le module d'Young (rigidité) et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

L'espace  $V_{adm}$  désigne l'espace des déplacement cinématiquement admissible, i.e. satisfaisant aux conditions d'encastrement sur le bord  $\Gamma$ , nous verrons qu'il s'agit d'un sous-ensemble d'un espace de Sobolev :

$$V_{adm} = \{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2 / \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0 \}.$$

On note que la condition de bord libre n'apparaît pas explicitement dans la formulation (1.5) : elle est implicite.

La formulation (1.5) est équivalente au problème aux limites :

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{\sigma} + \mathbf{f} &= 0 & \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 & \Gamma \\ \bar{\sigma} \mathbf{n} &= 0 & \partial\Omega - \Gamma \end{aligned}$$

Pour des raisons de simplicité nous avons présenté le cas de contrainte plane, mais il est clair que ce n'est en aucun cas une hypothèse nécessaire pour la MEF.

### 1.1.4 Problème 2d/3d : problème de Stokes

On considère un fluide Newtonien visqueux et incompressible à faible nombre de Reynolds occupant une surface/volume  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ . Si la vitesse est imposée égale à  $\mathbf{v}_0$  à la frontière

$\partial\Omega$ . La vitesse  $\mathbf{v}$  et la pression  $p$  à l'état stationnaire satisfait au problème aux limites :

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{v} + \nabla p &= 0 & \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 & \Omega \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 & \partial\Omega \end{aligned}$$

dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{v}, p) \in V_{adm} \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} \mathbf{v}^* \cdot \nabla p = 0 \quad \forall (\mathbf{v}^*, p^*) \in V_{adm} \\ \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

où

$$V_{adm} = \left\{ \mathbf{v}^* \in [H^1\omega]^n, p^* \in \mathbb{L}^2(\Omega) / \mathbf{v}^*|_{\Gamma} = \mathbf{v}_0 \right\}.$$

### 1.1.5 Problèmes non-linéaires

Tous les problèmes précédents sont des problèmes linéaires et en effet la MEF est définie à partir des problèmes linéaires puisqu'en pratique, il revient à résoudre un système linéaire.

Naturellement, il est tout à fait possible d'utiliser la MEF pour des problèmes non-linéaires (Navier-Stokes, grandes déformations, élasto-plasticité, contacts) mais ces derniers passeront systématiquement par un processus de linéarisation et la résolution se fera de façon itérative et non plus directe.

### 1.1.6 Problèmes dynamiques

Les problèmes précédemment présentés sont tous statiques. C'est parce que la méthode des éléments finis est définie à partir d'un problème aux limites, différent d'un problème de valeurs initiales (problème de Cauchy). Néanmoins, dans un cadre dynamique, la MEF peut encore mise à contribution soit de façon directe avec des calculs de modes propres, soit de façon indirecte et itérative avec un incrément de temps avec un algorithme de différence-finie comme l'algorithme de Newmark qui résout un problème au limite à chaque pas de temps.

## CHAPITRE 2

# Cadre théorique : espaces de Hilbert et espaces de Sobolev

Nous rappelons ici quelques éléments d'analyse fonctionnelle permettant de définir la méthode de Galerkin qui est la base théorique incontournable de la méthode des éléments-finis.

Ces connaissances sont nécessaires pour maîtriser la base mathématique mais il est tout à fait possible de n'en retenir que les principaux résultats de projections et en omettant la partie analyse des espaces de Sobolev pour une pratique élémentaire des éléments-finis. Les élèves non-mathématiciens pourront alors passer directement au chapitre suivant, ne retenant que la section sur la méthode de Galerkin.

Cependant, il est impossible de comprendre l'essence de la méthode et surtout ses limitations sans une connaissance profonde de ces questions, notamment en ce qui concerne les théorèmes de traces et sans lesquelles il est tout à fait possible dans la pratique d'essayer de résoudre par la MEF des problèmes qui n'ont pas de sens mathématiques (et donc potentiellement pas de sens du tout).

Nous nous bornerons aux résultats principaux éventuellement sous une forme simplifiée et généralement sans démonstration pour lesquelles nous renvoyons à un cours vrai d'analyse fonctionnelle tel que [Bre80, LM68].

## 2.1 Espaces de Hilbert

**Définition 2.1.1.** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et qui est complet pour la norme induite,  $\|\cdot\|_H$ .*

Dans toute la suite de ce chapitre,  $H$  désigne un espace de Hilbert muni de son produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et sa norme  $\|\cdot\|_H$  :

$$\|u\|_H^2 = (u, u)_H.$$

Pour simplifier l'exposé, nous nous bornerons aux espaces de Hilbert réels.

Les espaces de Hilbert sont donc un cas particulier d'espace de Banach. Ce qui est remarquable avec les espaces de Hilbert est qu'on y retrouve la plupart propriétés des espaces de dimensions finies : théorème de décomposition, projection orthogonale, base orthonormée et surtout identification de l'espace dual. Cela permet de transposer naturellement un problème continu à sa discrétisation à partir de ces espaces.

Commençons par quelques définitions et propriétés triviales.

**Définition 2.1.2.** *Soient  $u, v \in H$ , on dit que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux dans  $H$  si*

$$(u, v)_H = 0.$$

**Théorème 2.1.3.** *(théorème de décomposition) – Soit  $V$  un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ . on note l'espace orthogonal à  $V$  :*

$$V^\top = \{u \in H / (u, u^*) = 0 \quad \forall u^* \in V\}.$$

On a alors

$$H = V \oplus V^\top.$$

Exercice : Montrez le théorème de décomposition à partir du théorème 2.4.1 de projection sur un convexe fermé

**Proposition 2.1.4.** *(Identité du parallélogramme) –  $\forall u, v \in H$ ,*

$$\|u + v\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2.$$

**Définition 2.1.5.** *Le dual de  $H$  est l'ensemble des formes linéaires continues<sup>1</sup> sur  $H$ . Le dual est noté  $H'$  :  $\forall L \in H'$ , il existe  $c > 0$  telle que*

$$|L(u)| \leq c\|u\|_H.$$

1. On parle ici de dual topologique puisqu'on demande la propriété de continuité



## 2.2 Exemples : $\mathbb{L}^2$ et les espaces de Sobolev

### 2.2.1 Espace des fonctions de carré intégrable $\mathbb{L}^2$

Soit  $\Omega$  est un domaine *ouvert* mesurable de  $\mathbb{R}^n$ . L'exemple fondamental est l'espace des fonctions de carré intégrable

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega / \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\}.$$

Le produit scalaire est naturellement défini par

$$(u, v)_{\mathbb{L}^2} = \int_{\Omega} uv.$$

Le produit scalaire induit bien une norme si on quotiente les fonctions de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  par les fonctions nulles presque partout dans  $\Omega$  :

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \mathcal{L}^2(\Omega) / \sim$$

où on identifie

$$u = v \quad \text{dans } \mathbb{L}^2 \iff u(x) = v(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un domaine ouvert, muni de son produit scalaire naturel, l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.*

L'intégrale de Lebesgue assurant la complétude de l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  est bien un espace de Hilbert. Notons cependant que cette complétude se paye par la définition des fonctions presque partout seulement. Elles ne sont donc a priori pas continues et leur dérivées sont définies au sens généralisés ou au sens des distributions. Malgré cela ces fonctions s'avèrent applicables en pratique, en grande partie grâce au résultat de densité suivant :

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $\Omega$  un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace des fonctions continues  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  est dense dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  :*

$$\forall u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \exists u_n \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ telle que } u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

### 2.2.2 Espaces de Sobolev $H^m$

A partir de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ , on définit des espaces de Sobolev <sup>2</sup> :

**Définition 2.2.3.**

$$H^1(\Omega) = \{ v \in \mathbb{L}^2(\Omega) / v_{,i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), i = 1, \dots, n \}.$$

2. Il existe d'autres définitions possibles

on le munit du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i}$$

et on note la norme correspondante

$$\|u\|_{H^1}^2 = (u, u)_{H^1} = \int_{\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2$$

**Théorème 2.2.4.** *L'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.*

*Démonstration.* Comme  $H^1(\Omega)$  est pré-hilbertien par définition, il reste à démontrer qu'il est complet.

Soit  $u_n$  une suite de Cauchy dans  $H^1(\omega)$ .  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  étant complet, il existe  $u$  et  $v_i$  tels que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \mathbb{L}^2(\Omega) \\ u_{n,i} &\rightarrow v_i & \mathbb{L}^2(\Omega). \end{aligned}$$

Ces convergences ont également lieu dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , puisque les éléments de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  s'y injecte continument. Comme la dérivation est une opération continue dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on a

$$u_{n,i} \rightarrow u_{,i} \quad \mathcal{D}'(\Omega),$$

si bien que  $v_i = u_{,i}$  par unicité de la dérivée, qui prouve que  $u_{,i} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , et donc que  $v \in H^1$ . On a donc montré

$$u_n \rightarrow u \quad H^1(\Omega).$$

□

### 2.2.3 Trace dans un espace de sobolev

Un sous espace très important est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . on note :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}'(\Omega)}.$$

**Remarque 2.2.5.** *Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on a  $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ .*

Cette définition n'est pas du tout pratique, il est temps d'introduire les opérateurs traces sans lesquelles on ne pourrait définir mathématiquement les conditions aux limites.

Posons  $\Omega = [0, 1]^2$  et définissons pour toute fonction  $u_c$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overline{\Omega}$ , l'opérateur trace par la restriction de  $u_c$  sur le bord  $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \Omega / x_1 = 0\}$  :

$$\gamma(u_c) = u_c|_{\Gamma}.$$

A priori pour une fonction de  $H^1$ , la trace sur  $\Gamma$  n'a pas de sens. Cependant, on va montrer qu'il est possible de prolonger l'opérateur trace définie pour les fonctions continues : On a :

$$u_c(0, x_2) = u_c(x_1, x_2) - \int_0^{x_1} u_{c,1}(s, x_2) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\gamma(u_c)\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}^2 &= \int_0^1 |u_c(0, x_2)|^2 dx_2 \\ &= \int_0^1 \left| u_c(x_1, x_2) - \int_0^{x_1} u_{c,1}(s, x_2) ds \right|^2 dx_2 \\ &\leq \int_0^1 |u_c(x_1, x_2)|^2 dx_2 + \int_{\Omega} |u_{c,1}(s, x_2)|^2 ds dx_2 \end{aligned}$$

d'où, en intégrant de nouveau sur  $x_1$

$$\begin{aligned} \|\gamma(u_c)\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)}^2 &\leq \int_{\Omega} |u_c|^2 + \int_{\Omega} |u_{c,1}|^2 \\ &\leq \|u_c\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

si bien que l'opérateur trace peut être prolongé par continuité dans  $H^1$ . On généralise sans démonstration :

**Théorème 2.2.6.** Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à bord régulier ( $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux) et soient  $\Gamma \subset \partial\Omega$  et l'application trace,  $\gamma$ , définie pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{\Omega}$ .

$$\gamma(u) = u|_{\Gamma}.$$

Alors l'opérateur trace  $\gamma$  se prolonge continument dans tout l'espace  $H^1(\Omega)$  et il existe  $c > 0$ ,  $\forall u \in H^1(\Omega)$  :

$$\|\gamma(u)\|_{\mathbb{L}^2(\Gamma)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

L'opérateur trace nous permet alors de caractériser facilement l'espace  $H_0^1$  :

**Proposition 2.2.7.** Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à bord régulier, alors

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

## 2.3 Représentation de Riesz

On a alors le résultat fondamental :

**Théorème 2.3.1.** Représentation de Riesz – Soit  $L$  une forme linéaire continue définie sur un

Hilbert  $H$ . Il existe un unique  $u \in H$  tel que

$$(u, v)_H = L(v) \quad \forall v \in H.$$

*Démonstration.* Si  $L$  est identiquement nul, alors on a trivialement que  $u = 0$ .

On peut donc supposer désormais que  $L$  n'est pas identiquement nul et donc que le sous-espace  $\text{Ker}(L)^\perp$  est non réduit à  $\{0\}$ . Il existe alors un élément  $u_0 \in \text{Ker}(L)^\perp$  qu'on peut choisir de norme (dans  $H$ ) égale à 1.

Pour tout  $v \in H$ , on remarque que  $(L(u_0)v - L(v)u_0) \in \text{Ker}(L)$ , si bien qu'on a

$$(u_0, L(u_0)v - L(v)u_0)_H = 0 \implies L(v) = (L(u_0)u_0, v)_H.$$

On remarque alors qu'on peut prendre  $u = L(u_0)u_0$ .

Supposons désormais que  $u_1$  et  $u_2$  satisfont à la représentation de  $L$ , alors

$$(u_1, v)_H = (u_2, v) \quad \forall v \in H \implies u_1 = u_2 \text{ dans } H.$$

Ce qui montre l'unicité de la représentation de  $L$ . □

La signification du théorème de Riesz est que dans les espaces de Hilbert comme dans les espaces vectoriels de dimensions finies, il y a un isomorphisme naturel entre l'espace et son dual.

Il faut toutefois se méfier car en dimension infinie, les normes n'étant généralement pas équivalentes, des confusions sont possibles : bien souvent dans les applications on se trouve plutôt dans des situations où l'espace de travail est un espace de Hilbert  $V$  qui s'injecte continuellement dans un espace plus grand  $H$  (par exemple  $V = H_0^1$  et  $H = \mathbb{L}^2$ ) et l'identification est pratique dans  $H$  mais pas dans  $V$ . On a alors la situation

$$V \hookrightarrow H \sim H' \hookrightarrow V'.$$

## 2.4 Théorèmes de projection dans un Hilbert

On considère dans cette section les théorèmes de projection dans un espace de Hilbert qui forment la base théorique de la MEF, dont on verra qu'elle est essentiellement une méthode d'approximation par projection.

**Théorème 2.4.1.** – (*Projection sur un convexe*) – Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $K$  un convexe fermé de  $H$ , alors  $\forall u \in H, \exists! u_k \in K$  tel que

$$\|u - u^*\|_H \geq \|u - u_k\|_H \quad \forall u^* \in K.$$

De plus, on a

$$(u - u_k, u^* - u_k) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

C'est un théorème de projection :  $u_k$  est l'unique projeté de  $u$  sur  $K$ . On renvoie la preuve en annexe. Un corollaire immédiat est le résultat suivant :

**Corollaire 2.4.2.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $K$  un convexe fermé de  $H$ , et  $a(.,.)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H$ , alors  $\forall u \in H, \exists! u_k \in K$  tel que*

$$\|u - u^*\|_a \geq \|u - u_k\|_a \quad \forall u^* \in K.$$

De plus, on a

$$a(u - u_k, u^* - u_k) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

où on a noté

$$\|u\|_a^2 = a(u, u).$$



## CHAPITRE 3

# Formulation variationnelle

On a vu dans les exemples de l'introduction, que les problèmes aux limites possèdent une formulation variationnelle équivalente. Ce sont sur ces formulations qu'on se base pour établir non seulement les résultats d'existence et d'unicité (pour les problèmes linéaires) mais aussi ce sont ces formulations qui sont à la base de la MEF.

### 3.1 Problème variationnel abstrait : théorème de Lax-Milgram

On considère dans cette section un espace de Hilbert  $V$  et un sous-espace *affine* fermé  $V_{adm} \subset V$ . On note  $V_{admh}$  l'espace vectoriel associé à  $V_{adm}$ , i.e.

$$\forall u, u^* \in V_{adm}, \quad (u^* - u) \in V_{admh}.$$

On a naturellement  $V_{admh} \subset V$ .

**Remarque 3.1.1.** *Travailler dans un espace affine signifie que le problème aux limites n'est pas homogène. Nous allons voir que via une translation il est facile de se ramener à un problème aux limites homogènes. Néanmoins il est important en pratique de considérer les problèmes non-homogènes.*

**Théorème 3.1.2.** (*Lax-Milgram*) – Soit  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue sur  $V$  et soit  $L$  une

forme linéaire définie et continue sur  $V$ , définissant le problème variationnel abstrait suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, u^* - u) = L(u^* - u) \quad \forall u^* \in V_{adm} \end{cases} \quad (3.1)$$

Si  $a$  est coercive sur  $V_{admh}$ , i.e.  $\exists c > 0$  telle que

$$a(v, v) \geq c\|v\|_V \quad \forall v \in V_{admh},$$

alors (3.1) est un problème bien posé,

Si de plus  $a$  est symétrique, alors l'unique solution de (3.1) minimise dans  $V_{adm}$  la fonctionnelle dite d'énergie :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Autrement dit :

$$J(u) \leq J(u^*) \quad \forall u^* \in V_{adm}.$$

*Démonstration.* Remarquons que lorsque  $u^*$  parcourt tout  $V_{adm}$ ,  $(u^* - u)$  parcourt tout  $V_{admh}$ . La formulation variationnelle (3.1) entraîne :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, v^*) = L(v^*) \quad \forall v^* \in V_{admh} \end{cases}$$

Soit  $u_0 \in V_{adm}$  arbitraire, posons  $v = u - u_0 \in V_{admh}$ . Le problème (3.1) se réécrit donc

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in V_{admh} \text{ tel que} \\ a(v, v^*) = \tilde{L}(v^*) \quad \forall v^* \in V_{admh} \end{cases}$$

avec

$$\tilde{L}(v^*) = L(v^*) - a(u_0, v^*).$$

La coercivité dans  $V_{admh}$  signifie simplement que la forme bilinéaire  $a(., .)$  définit un produit scalaire induisant une norme équivalente à la norme de  $V$  dans  $V_{admh}$ . Le théorème 2.3.1 de représentation de Riesz indique simplement que puisque  $L \in V' \subset V'_{admh}$ , il existe un unique représentant  $v \in V_{admh}$  tel que

$$a(v, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_{admh}.$$

On en déduit simplement  $u = v + u_0$ , l'unique solution de (3.1).



Considérons maintenant la fonctionnelle  $J$  et développons pour tout  $u^* \in V_{adm}$  :

$$\begin{aligned} J(u^*) &= J(u + u^* - u) \\ &= J(u) + \frac{1}{2} [a(u, u^* - u) + a(u^* - u, u)] - L(u^* - u) + a(u^* - u, u^* - u) \end{aligned}$$

Ainsi, si  $a(\cdot, \cdot)$  est symétrique, il vient :

$$\begin{aligned} J(u^*) &= J(u) + \underbrace{a(u, u^* - u) - L(u^* - u)}_{=0} + \underbrace{a(u^* - u, u^* - u)}_{\geq 0} \\ &\leq J(u). \end{aligned}$$

On remarque au passage que

$$\begin{aligned} (\nabla J(u), v) &= \frac{1}{2} [a(u, v) + a(v, u)] - L(v) \\ (\nabla^2 J(u), v^2) &= a(v, v) \end{aligned}$$

d'où on déduit notamment que la coercivité de  $a$  entraîne que  $J$  est strictement convexe sur  $V_{adm}$ .

Réciproquement, si  $u \in V_{adm}$  minimise  $J$  dans  $V_{adm}$ , alors les conditions d'optimalité (sur un ensemble convexe), voir le théorème 7.2.1, s'écrivent :

$$\nabla J(u)(u^* - u) \geq 0 \quad \forall u^* \in V_{adm}$$

Comme  $V_{adm}$  est affine, on a aussi l'inégalité inverse, d'où on tire que  $u$  est solution de (3.1).  $\square$

## 3.2 Méthode de Galerkin

Soit  $u$  l'unique solution du problème variationnel (3.1) bien posé

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a(u, u^* - u) = L(u^* - u) \quad \forall u^* \in V_{adm} \end{cases}$$

dans le cadre du théorème de Lax-Milgram 3.1.2, i.e. la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et coercive.

Soit un sous-espace fermé  $V^h \subset V$ , on définit également

$$V_{adm}^h = V^h \cap V_{adm}.$$

Alors si  $a(\cdot, \cdot)$  est également coercive sur  $V_{adm}^h$ , ce qui est trivial si  $V_{adm}^h \subset V_{adm}$ , alors le

théorème de Lax-Milgram s'applique également pour le problème variationnel de Galerkin :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in V_{adm}^h \text{ tel que} \\ a(u^h, u^* - u^h) = L(u^* - u^h) \quad \forall u^* \in V_{adm}^h \end{cases} \quad (3.2)$$

et il existe une unique solution  $u^h$  au problème (3.2), c'est la solution de Galerkin dans le sous-espace  $V_{adm}^h$ .

Ce qui est naturellement intéressant, c'est la relation liant les solutions  $u$  et  $u^h$ . C'est le résultat à la base des théorèmes de convergence de la MEF :

**Théorème 3.2.1.** *La solution  $u^h$  du problème de Galerkin (3.2) dans  $V_{adm}^h$  est la meilleure approximation de la solution  $u$  de (3.1) dans  $V^h$  au sens de la norme induite par  $a(\cdot, \cdot)$ , i.e. ,*

$$\|u - u^h\|_a \leq \|u - u^*\|_a \quad \forall u^* \in V_{adm}^h.$$

La solution de Galerkin s'interprète aussi comme la projection orthogonale de  $u$  sur  $V_{adm}^h$  au sens produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$ .

*Démonstration.* On évalue pour tout  $u^* \in V_{adm}^h$  :

$$\begin{aligned} a(u^* - u, u^* - u) &= a(u^* - u_h + u_h - u, u^* - u_h + u_h - u) \\ &= a(u^* - u_h, u^* - u_h) + 2a(u^* - u_h, u_h - u) + a(u_h - u, u_h - u), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} a(u^* - u_h, u_h - u) &= a(u^* - u_h, u_h) - a(u^* - u_h, u) \\ &= L(u^* - u_h) - L(u^* - u_h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u^* - u, u^* - u) &= \underbrace{a(u^* - u_h, u^* - u_h)}_{\geq 0} + a(u_h - u, u_h - u) \\ &\geq a(u_h - u, u_h - u). \end{aligned}$$

□

Exercice : Montrer, sous les hypothèse du théorème 3.1.2, une généralisation pour tout convexe fermé  $K \subset V_{adm}$  : la solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_k \in K \text{ tel que} \\ a(u_k, u^* - u_k) \geq L(u^* - u_k) \quad \forall u^* \in K \end{cases} \quad (3.3)$$

est la projection orthogonal de  $u$  sur  $K$  suivant le produit scalaire  $a(\cdot, \cdot)$ .

### 3.3 Méthode de Galerkin en dimension finie

Dans le cadre du théorème 3.2.1, si le sous-espace  $V^h$  est de dimension finie, alors nous allons voir que la solution de Galerkin peut être obtenue en résolvant un système linéaire discret :

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où  $V_{adm}$  est un sous-espace vectoriel, de dimension  $n$ , il existe alors une base  $\phi_i$  de  $V_{adm}^h$ . Comme tout élément de  $V_{adm}^h$  se décompose de façon unique dans cette base, le problème de Galerkin 3.2 revient à trouver les composantes de  $u^h$ , représenté par le vecteur  $\hat{u}^h = [u_1^h, u_2^h, \dots, u_n^h]^T$ , dans cette base :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u}^h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ a(u^h, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in V_{adm}^h \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u}^h \in \mathbb{R}^n \text{ tel que} \\ a(u_i^h \phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Si bien que nous avons :

**Proposition 3.3.1.** *Dans l'espace vectoriel  $V_{adm}^h$  de dimension égale à  $n$ , le problème de Galerkin 3.2 revient à trouver les composantes  $\hat{u}^h = [u_1^h, u_2^h, \dots, u_n^h]^T$  de  $u^h$  en résolvant le problème matriciel*

$$K \hat{u}^h = L,$$

où  $K$  est une matrice carrée symétrique de dimension  $n \times n$  et  $L$  un vecteur de dimension  $n$  dont les composantes sont :

$$K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad \text{et} \quad L_j = L(\phi_j)$$

Le problème continu est ainsi approché par un problème discret. La discrétisation se fait dans le choix de l'espace : plus  $V_{adm}^h$  sera proche de  $V_{adm}$  et meilleure sera l'approximation.

Supposons qu'on ait une suite d'espaces  $V_{adm}^n \subset V_{adm}$  tels que quel que soit  $v \in V_{adm}$ , il existe une suite  $v^n \in V_{adm}^n$  telle que

$$v^n \longrightarrow v \quad V$$

alors le théorème 3.2.1 garantit que la suite des solutions  $u^n$  des solutions des problèmes de Galerkin 3.2 converge vers la solution du problème continu.

#### 3.3.1 Premier exemple et exercices

Reprenons le problème (1.1) et sa formulation variationnelle associée,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ telle que} \\ a(u, u^*) = L(u^*) \quad \forall u^* \in H_0^1([0, 1]) \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$a(u, u^*) = \int_{[0,1]} ku'u^{*'} + \alpha uu^*$$

$$L(u^*) = \int_{[0,1]} fu^*$$

1. Montrer qu'une solution du problèmes au limites (1.1) est nécessairement une solution du problème variationnel (4.2) (la réciproque, plus difficile est renvoyée en annexe).
2. Montrer que si  $k$  et  $\alpha$  sont de même signe , alors le problème (3.4) est bien posé.
3. Qu'en est il lorsque  $k$  et  $\alpha$  sont de signes opposés ?
4. Fixons  $k = 1, \alpha = 1$  et posons

$$V_{adm}^1 = Vect \{sin(\pi x)\}.$$

Trouvez la solution de Galerkin du problème (4.2) dans  $V_{adm}$ .

5. Répétez la question précédente avec

$$V_{adm}^2 = Vect \{sin(\pi x), sin(2\pi x)\}.$$

6. Comparez les deux solutions précédentes avec la solution exacte à calculer.
7. Soit la suite d'espaces

$$V_{adm}^n = Vect \{sin(\pi x), sin(2\pi x), \dots, sin(n\pi x)\}.$$

montrer que la suite de solutions de Galerkin correspondantes,  $u^n$ , converge vers la solution de (4.2).

### 3.3.2 Élément-finis et méthode de Galerkin

La méthode des éléments finis dérive de la méthode de Galerkin en choisissant  $V_{adm}^h$  sur la base d'une décomposition du domaine sur lequel un problème aux limites est posé. Ainsi, un intervalle de  $\mathbb{R}$  est divisé en segments, une géométrie simple de  $\mathbb{R}^2$  est décomposé en triangle, en quadrangles,...

## CHAPITRE 4

# Éléments-finis par l'exemple : Problèmes 1D

Il est assez délicat de 'théoriser' la méthode des éléments-finis. La pratique pouvant facilement s'écarter du cadre théorique rigoureux. Dans un premier temps nous nous concentrerons sur des MEF dérivant du principe de Galerkin, voir le théorème 3.2.1, à savoir que nous projetons les solutions sur un sous-espace caractérisé par une interpolation polynomiale par morceaux.

Même si le principe de la méthode est essentiellement très simple : discrétisation, choix d'une base, calcul des matrices puis résolution d'un système linéaire, la pratique recèle une bonne quantité de techniques qu'il n'est pas aisé de théoriser et de présenter d'un seul coup.

Suivant les cas considérés, des difficultés apparaissent dans le choix de la *discrétisation*, le choix de l'*interpolation polynomiale* par morceaux, la technique d'*intégration numérique*, la façon dont on implémente les conditions aux limites qui peuvent être homogènes ou non-homogènes, il faut aussi pouvoir implémenter des *conditions de périodicité*.

Nous choisissons donc de présenter des exemples génériques à partir desquels il devrait être facile d'adapter la plupart des problèmes aux limites rencontrés dans les applications : on commence par un exemple scalaire 1d où la discrétisation du domaine est triviale : un intervalle réel est subdivisé en sous-intervalles consécutifs. Nous proposons en 1d deux choix d'interpolation polynomiale par morceaux, de degré 1, noté  $P^1$ , et de degré 3, noté  $P^3$  dans un second exemple modélisant la flexion d'une poutre droite élastique.

## 4.1 Problème 1D, interpolation $P^1$

Reprenons le problème le problème aux limites (1.2), présenté en introduction, pour une fonction scalaire définie sur  $[0, 1]$ ,  $f \in \mathbb{L}^2$ , mais dans un cadre plus général avec des conditions aux limites non-homogènes a priori :

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f \quad [0, 1] \\ u(0) &= u_0 \\ u(1) &= u_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente, voir la preuve de l'équivalence en annexe :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ telle que} \\ a(u, u^* - u) = L(u^* - u) \quad \forall u^* \in V_{adm} \end{cases} \tag{4.2}$$

où

$$V_{adm} = \{v \in H^1([0, 1]) / u(0) = u_0, \text{ et } u(1) = u_1\}$$

avec

$$\begin{aligned} a(v, v^*) &= \int_{[0,1]} v'v'^* + vv^* \\ L(v^*) &= \int_{[0,1]} fv^* \end{aligned}$$

### 4.1.1 Maillage SEG2 et interpolation linéaire par morceaux : élément $P^1$ de Lagrange

Pour un intervalle la seule subdivision raisonnable est une décomposition en segments successifs : nous subdivisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $n - 1$  segments :

$$[0, 1] = \bigcup_i^{n-1} E_i, \quad E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1.$$

On appelle cette subdivision *maillage* par analogie au cas 2D exposée un peu plus tard. Les segments sont les *éléments* du maillage. Chaque éléments étant ici délimités par leurs extrémités qui constituent les *nœuds* du maillage. Ce type de maillage est communément nommé 'SEG2', en référence à un maillage constitués de segments définis par leurs deux nœuds extrémités.

La MEF que nous allons développer est la méthode de Galerkin appliquée à une interpolation

polynomiale par morceaux, on définit le sous-espace discrétisé :

$$V^n = \{v \in H^1 / v|_{E_i} \text{ est polynomial de degré 1 sur } E_i, \quad i = 1, \dots, n-1\}.$$

dont on définit une base avec une famille de fonctions polynomiales de degré 1 sur chaque éléments  $E_i$  et qu'on définit par :

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

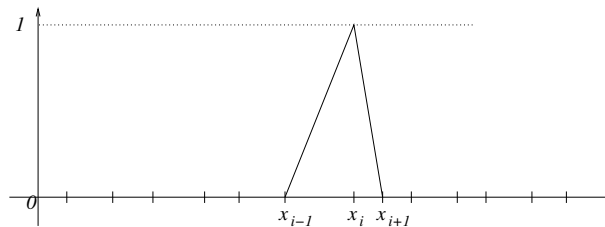


FIGURE 4.1 – Fonction  $\phi_i$  polynomial par morceaux, valant 1 en  $x_i$  et 0 sur les autres nœuds.

Dans cette base, pour chaque  $v \in V_{adm}^n$ , on a la décomposition

$$v(x) = v_i \phi_i(x).$$

Le choix de cette base est vraiment naturel car une composante  $v_i$  représente la valeur de  $v$  au nœuds  $x_i$ . C'est ce qui rend ce choix pratique dans l'interprétation de la solution éléments-finis qu'on obtient. Ainsi, dans le problème (4.2), les inconnues à déterminer, qu'on nomme généralement *ddl*, pour degré de liberté, sont les valeurs de  $u$  aux nœuds du maillage considéré.

#### 4.1.2 Matrices de l'élément $P^1$

On note également,

$$v(x) = \underbrace{[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n]}_{\hat{\phi}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{\hat{v}}$$

On en déduit une expression similaire pour la dérivée  $v'$  :

$$v'(x) = \underbrace{[\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \dots \quad \phi'_n]}_B \hat{v}$$

En résumé, on a

$$\begin{aligned} v(x) &= \widehat{\phi}^T \widehat{v} \\ v'(x) &= B \widehat{v} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{v}^T &= [v_1, v_2, \dots, v_n], \\ \widehat{\phi}^T &= [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)], \\ B &= [\phi'_1(x), \phi'_2(x), \dots, \phi'_n(x)]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $v, v^* \in V^n$ , on a

$$\begin{aligned} a(v, v^*) &= \int_{[0,1]} v' v'^* + v v^* \\ &= \int_{[0,1]} [B \widehat{v}]^T [B \widehat{v}^*] + [\widehat{\phi}^T \widehat{v}]^T [\widehat{\phi}^T \widehat{v}^*] \\ &= \widehat{v}^T \left[ \underbrace{\int_{[0,1]} B^T B}_K + \underbrace{\int_{[0,1]} \widehat{\phi} \widehat{\phi}^T}_M \right] \widehat{v}^* \\ L(v^*) &= \int_{[0,1]} f v^* \\ &= \left[ \underbrace{\int_{[0,1]} \widehat{f}^T}_{L^T} \right] \widehat{v}^* \end{aligned}$$

### 4.1.3 Éléments-finis $P^1$ , le système linéaire

On définit alors l'espace affine admissible

$$\begin{aligned} V_{adm}^n &= \{v \in V^n / v(0) = u_0 \text{ et } v(1) = u_1\} \\ &\sim \{\widehat{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n / v_1 = u_0 \text{ et } v_n = u_1\} \\ &\sim \{\widehat{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n / C \widehat{v} = g\} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ g &= \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



et l'espace vectoriel associé

$$V_{adm}^n = \{v \in V^n / C\hat{v} = 0\}^1.$$

Si bien que nous réécrivons la formulation variationnelle (4.2) en remplaçant  $u$  par sa représentation dans  $V_{adm}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in V_{adm}^n \text{ telle que} \\ a(\hat{u}^T \hat{\phi}, [\hat{u}^* - \hat{u}]^T \hat{\phi}) = L([\hat{u}^* - \hat{u}]^T \hat{\phi}) \quad \forall \hat{u}^* \in V_{adm}^n \end{array} \right.$$

qui devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in V_{adm}^n \text{ telle que} \\ \hat{u}^T [K + M][\hat{u}^* - \hat{u}] = L^T[\hat{u}^* - \hat{u}] \quad \forall \hat{u}^* \in V_{adm}^n \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in V^n \text{ telle que} \\ \hat{u}^T [K + M][\hat{u}^*] = L^T[\hat{u}^*] \quad \forall \hat{u}^* \in V_{adm}^n \\ C\hat{u} = g \end{array} \right.$$

On reconnaît la solution d'un problème d'optimisation quadratique sous contrainte d'égalité. Avec l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, on obtient :

**Proposition 4.1.1.** *La solution éléments-finis du problème (4.2) dans  $V_{adm}^n$  est la solution du système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in V^n, q \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que} \\ \begin{bmatrix} K + M & C^T \\ C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ g \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

*Exercice :* Démontrer la proposition 4.3.

L'introduction du multiplicateur n'est pas très pratique : en effet le système linéaire peut a priori perdre sa positivité<sup>2</sup>. Dans ce cas de contrainte d'égalité simple, il est plus judicieux d'opérer par substitution :

Posons  $L_1$  la liste des nœuds sur lesquels une condition au limite est imposée (dans le cas présent,  $L_1 = [1, n]$ ). Considérons également la liste complémentaire  $L_2$  de sorte que

$$\begin{aligned} L_1 \cup L_2 &= [1, 2, \dots, n] \\ \hat{u}(L_1) &= C\hat{u} = g \\ \hat{u}(L_1) - \hat{u}^*(L_1) &= 0 \quad \forall \hat{u}^* \in V_{adm}^n \end{aligned}$$

1. ici  $V_{adm}^n = H_0^1([0, 1])$

2. Il existe cependant une astuce permettant de conserver cette propriété

Alors nous pouvons réécrire le problème variationnel, pour tout  $\widehat{u}^* \in V_{adm}^n$  et en introduisant

$$KM = K + M,$$

il vient :

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}(L_1) \\ \widehat{u}(L_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} KM(L_1, L_1) & KM(L_1, L_2) \\ KM(L_2, L_1) & KM(L_2, L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{u}^*(L_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(L_1) \\ L(L_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{u}^*(L_2) \end{bmatrix}$$

Comme  $\widehat{u}^*(L_2)$  parcourt  $\mathbb{R}^{|L_2|} = \mathbb{R}^{n-2}$ , le système se simplifie et devient :

$$KM(L_2, L_2)\widehat{u}(L_2) + KM(L_2, L_1)\widehat{u}(L_1) = L(L_2)$$

soit finalement :

$$KM(L_2, L_2)\widehat{u}(L_2) = L(L_2) - KM(L_2, L_1)g. \quad (4.4)$$

Le système (4.4) est de Cramer avec une matrice symétrique définie positive, il suffit alors de l'inverser avec un solveur tel que la méthode du gradient conjugué ou par une factorisation de Choleski.

#### 4.1.4 Construction des matrices : technique d'assemblage

Il ne nous reste plus qu'à décrire la construction pratique des matrices  $K$  et  $M$ . Pour cela on utilise une technique dite d'assemblage qui calcule les matrices 'élément par élément' : on tire avantage du fait que les fonctions d'interpolations de  $V^n$  sont à support nul sauf sur deux éléments.

On décompose le calcul des matrices  $K$  et  $M$  sur tous les éléments :

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{E_i} B^T B + \widehat{\phi}\widehat{\phi}^T \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} K_i \end{aligned}$$

où  $K_i$  et  $M_i$  désignent les matrices élémentaires

$$\begin{aligned} K_i &= \int_{E_i} B^T B \\ M_i &= \int_{E_i} \widehat{\phi}\widehat{\phi}^T \end{aligned}$$

Considérons un élément isolé  $E_i = [x_i, x_{i+1}]$ , d'après leur définition, seuls les fonctions  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$  sont non-nuls, si bien qu'il est pratique de réduire les expressions, en faisant un abus de

notation sans ambiguïté :

$$\hat{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \phi_i \\ \phi_{i+1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \hat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} x_{i+1} - x \\ x - x_i \end{bmatrix}$$

de même,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \phi'_i \\ \phi'_{i+1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} \phi'_i \\ \phi'_{i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

où  $h_i = |E_i|$ . Ainsi, le calcul effectifs des matrices élémentaires est réduit au calcul des composantes non-nulles :

$$K_i([x_i, x_{i+1}], [x_i, x_{i+1}]) \longrightarrow K_i = \int_{E_i} \frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} dx,$$

$$M_i([x_i, x_{i+1}], [x_i, x_{i+1}]) \longrightarrow M_i = \int_{E_i} \frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} \phi'_i & \phi'_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi'_i \\ \phi'_{i+1} \end{bmatrix} dx.$$

*Exercice* : Montrer que pour chaque élément  $E_i$  :

$$K_i = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_i = \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

#### 4.1.5 Application numérique

Dans ce paragraphe nous allons détailler numériquement l'exemple précédent. On se donne une subdivision en 3 éléments de longueurs égales :

$$0 \xrightarrow{E_1} x_1 \xrightarrow{E_2} x_2 \xrightarrow{E_3} x_3 \xrightarrow{I} x_4$$

on définit les 4 nœuds par un tableau 'nœud' contenant les abscisses des nœuds :

$$noeud = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

correspondant à

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/3, \quad x_3 = 2/3, \quad x_4 = 1.$$

Les 3 éléments sont définis selon un tableau de nœuds :

$$element = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond bien à

$$E_1 = [x_1, x_2], \quad E_2 = [x_2, x_3], \quad E_3 = [x_3, x_4].$$

Alors, puisque  $h_1 = h_2 = h_3 = 1/3$ , on a (avec un abus d'écriture) :

$$K_1 = K_2 = K_3 = 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d'où l'assemblage

$$\begin{aligned} K &= 3 \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{K_1} + 3 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{K_2} + 3 \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{K_3} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on calcule

$$M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$KM = K + M = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 56 & -53 & 0 & 0 \\ -53 & 112 & -53 & 0 \\ 0 & -53 & 112 & -53 \\ 0 & 0 & -53 & 56 \end{bmatrix}.$$

Le second membre se calcule de même :

$$L = \frac{f}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si bien que le système linéaire du problème éléments-finis (4.4) devient :

$$\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 112 & -53 \\ -53 & 112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 56 & 0 \\ 0 & 56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

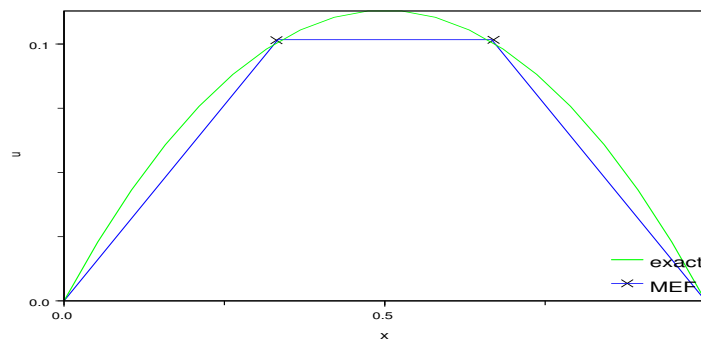


FIGURE 4.2 – Solution exacte et solution EF à 3 éléments du problème (4.2) pour  $f = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$ .

### 4.1.6 Estimation d'erreur

Sur la figure 4.2, nous voyons qu'une solution Éléments-finis par interpolation  $P^1$  de Lagrange donne déjà d'assez bon résultats même pour 3 éléments seulement. Nous le voyons bien car une solution exacte est disponible, il est alors facile de comparer. En général cependant (sinon à quoi bon se fatiguer) les solutions exactes sont inaccessibles. Lorsqu'on fait un calcul par éléments-finis, il faut s'assurer de la validité du calcul (cela est vrai pour n'importe quel méthode)

### 4.1.7 Programme Scilab

Voici un programme scilab (compatible version 4.2 – 5.2) résolvant le problème (4.2) par la méthode des éléments finis pour  $f = 1, u_0 = 0, u_1 = 0$  :

```
clear(); clf();
// Première partie : Préprocesseur
// Définition du maillage et
// Tableau Element/Noeuds

n = 4 ;
noeud = linspace(0,1,n)' ; // numérotation des noeuds implicite
                        // noeud contient les abscisses des noeuds
element = [1:n-1 ; 2:n]' ; // Les éléments sont constitués de noeuds successifs
nombre_element = size(element,1) ;

// Deuxieme partie construction de la matrice de rigidité
// Boucle sur les éléments = assemblage

K = zeros(n,n);          // Initialisation
for i=1:nombre_element
    N = element(i,1:2) ;
    x = noeud(N) ;
    xa = x(1) ; xb = x(2);
    h = abs(xb -xa) ;
    B = [ -1.  1.] ;
    Kel = h*[2 1
              1 2]/6 ;
    Kel = Kel + B'*B /h ;
    K(N,N) = K(N,N) + Kel ;
end

// Troisième partie : Second membre

L = zeros(n,1);          // Initialisation
for i=1:nombre_element
    N = element(i,:) ;
    x = noeud(N) ;
    xa = x(1) ; xb = x(2);
    h = abs(xb -xa) ;
    Le1 = [ 1 ; 1 ] * h /2;
    L(N) = L(N) + Le1 ;
end

// Quatrième partie : Prise en compte des CL par substitution
L1 = [ 1 n] ; // Liste des noeuds sur lesquels
                // la solution est imposée
```

```

L2 = [ 2:(n-1) ] ; // Liste complémentaire à L1
U = zeros(n,1) ; // Initialisation de la solution
// Les conditions aux limites sont implicites

// Cinquième partie Résolution par factorisation de Choleski
KM = sparse(K(L2,L2)) ;
spcho = chfact(KM) ;
U(L2) = chsolve(spcho,L(L2)) ;
    
```

*Exercice* : Modifier le programme précédent pour prendre en compte les cas non-homogènes, puis pour  $f$  une fonction non-constante arbitraire.

## 4.2 Poutre en flexion, interpolation $P^3$ sur maillage SEG2

On considère le problème des poutre en flexion, sous l'action normale d'une densité linéique  $f$ , encastrée à une extrémité, libre à l'autre.

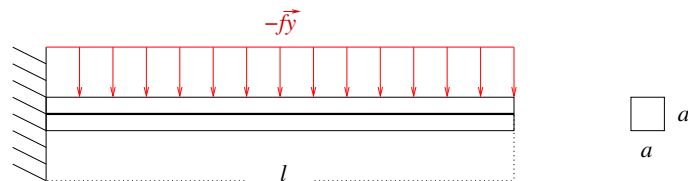


FIGURE 4.3 – Poutre encastré à une extrémité soumise à une force normale.

### 4.2.1 Le modèle de Bernouilli

Selon le modèle de Bernouilli l'équilibre d'un tel système s'écrit

$$\begin{aligned} T' + f &= 0 \\ M' + T &= 0 \end{aligned}$$

où  $T$  désigne l'effort tranchant,  $M$  le moment de flexion relié à un déplacement normal  $v$  (flèche) via la loi de comportement, pour une poutre en flexion homogène isotrope de module d'Young  $E$  et de moment quadratique d'inertie  $I$  :

$$\begin{aligned} w' &= \frac{M}{EI} \\ v' &= w \end{aligned}$$

$v$  est la flèche ou déplacement normal,  $w$  est la rotation.

Les conditions aux limites s'écrivent à l'extrémité encastrée

$$v(0) = 0, \quad w(0) = 0$$

et à l'extrémité libre :

$$T(l) = 0, \quad M(l) = 0.$$

Il est possible de réécrire tout le problème sous la forme d'un problème différentiel aux limites d'ordre 4 en  $v$  :

$$\begin{aligned} (EIv'')'' &= f \quad [0, l] \\ v(0) &= 0 \\ v'(0) &= 0 \\ v''(l) &= 0 \\ v'''(l) &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

## 4.2.2 Principe des travaux virtuels

*Exercice :*

1. Montrer qu'une solution du problème au limite (4.5) est également une solution de la formulation variationnelle (4.6), Cette formulation s'interprète également comme le principe des travaux virtuels.
2. Montrer que (4.6) possède une solution unique.

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in V_{adm} \text{ tel que} \\ a_f(v, v^*) = L(v^*) \quad \forall v^* \in V_{adm} \end{cases} \tag{4.6}$$

où

$$V_{adm} = \{u \in H^2([0, l]) / u(0) = u'(0) = 0\},$$

et avec la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion  $a_f$

$$a_f(v, v^*) = \int_{[0, l]} EIv''v''^*, \quad \text{et} \quad L(v^*) = \int_{[0, l]} fv^*.$$

## 4.2.3 Maillage SEG2 et Interpolation $P^3$

Comme dans dans l'exemple 4.1, nous considérons un maillage SEG2 de l'intervalle  $[0, l]$ , *i.e.* une subdivision en  $n - 1$  segments :

$$[0, l] = \bigcup_i^{n-1} E_i, \quad E_i = [x_i, x_{i+1}]$$

avec les nœuds

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = l.$$



Associé à le type de maillage, il est possible de définir une interpolation plus riche qu'une interpolation  $P^1$ . On définit le sous-espace discrétisé :

$$V^n = \{v \in H^1 / v|_{E_i} \text{ est polynomial de degré 3 sur } E_i, \quad i = 1, \dots, n-1\}.$$

dont on définit une base avec deux familles de fonctions polynomiales de degré 3 sur chaque éléments  $E_i$  et qu'on définit par :

$$\begin{aligned} \phi_i(x_j) &= \delta_{i,j}, & \phi_i'(x_j) &= 0, \\ \psi_i(x_j) &= 0, & \psi_i'(x_j) &= \delta_{i,j}. \end{aligned} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (4.7)$$

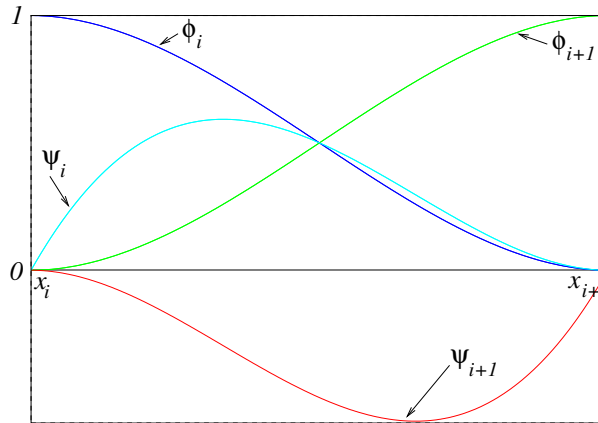


FIGURE 4.4 – Fonctions d'interpolation  $P^3$  définies par (4.7).

Les conditions (4.7) sont suffisantes pour déterminer les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sur chaque élément  $E_i$ .

*Exercice :* Montrer que sur  $E_i = [x_i, x_{i+1}]$  et  $h = x_{i+1} - x_i$ , on a

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \frac{1}{h^3}(x - x_{i+1})^2(2x + x_{i+1} - 3x_i) & \psi_i(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})^2 \\ \phi_{i+1}(x) &= \frac{1}{h^3}(x - x_i)^2(3x_{i+1} - x_i - 2x) & \psi_{i+1}(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1}). \end{aligned}$$

Soit  $v \in V^n$ , on peut le décomposer dans cette base :

$$v(x) = v_i \phi_i(x) + w_i \psi_i(x).$$

Comme dans le cas précédent, cette base est très pratique : les composantes  $v_i$  et  $w_i$  représentent respectivement la valeur de  $v$  et la valeur de  $v'$  au nœud  $x_i$ . Nous notons que pour chaque nœud  $x_i$ , il est défini deux *degrés de liberté*  $v_i$  et  $w_i$ . Ainsi, si la discrétisation est définie par  $n$  nœuds,

alors il y aura  $2n$  degrés de liberté.

On note de façon matricielle

$$v(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \psi_1 & \dots & \phi_n & \psi_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\hat{v}},$$

alors on a

$$v'' = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1'' & \psi_1'' & \dots & \phi_n'' & \psi_n'' \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}}_{\hat{v}}.$$

**Remarque 4.2.1.** Si nous avons choisi une interpolation  $P^1$ , alors le problème de Galerkin associé donne simplement un problème nul, puisque la dérivée seconde d'une fonction linéaire par morceaux est nulle sur chaque morceaux. D'un point de vue plus théorique, les fonctions polynomiale de degré 1 par morceaux n'appartiennent pas en général à l'espace  $H^2$ , qui contient l'espace des fonctions de classe  $C^1$ .

#### 4.2.4 Calcul de la matrice rigidité à la flexion

On procède toujours par assemblage, puisque sur un élément  $E_i$  toutes les fonctions d'interpolations sont nulles sauf quatre :  $\phi_i, \phi_{i+1}, \psi_i$  et  $\psi_{i+1}$ .

On calcule donc les matrices élémentaires de façon exacte :

$$K_i = \int_{E_i} EIB' * B = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & -6h & -12 & -6h \\ -6h & 4h^2 & 6h & 2h^2 \\ -12 & 6h & 12 & 6h \\ -6h & 2h^2 & 6h & 4h^2 \end{bmatrix}$$

*Exercice :* Calculer par assemblage la matrice de rigidité d'une poutre discrétisée en 3 éléments de longueurs égales. Appliquer au cas d'une densité de force linéique uniforme.

### 4.3 Élément-finis 1D dans le plan, structures en treillis

Un treillis est une structure mécanique constitué de  $n_b$  barres élastiques reliés en leurs extrémités par des liaisons rotules parfait (sans frottements), voir figure 4.5. C'est un exemple où la méthode des éléments finis est confondue avec une résolution exacte du problème par la méthode matricielle : les barres constituant naturellement les éléments de discrétisation de la structure.

Pour nous fixer les idées considérons le treillis constitué de 7 barres élastiques définies à partir de 6 nœuds, soumis à une charge ponctuelle au nœud 2, Fig 4.5 :

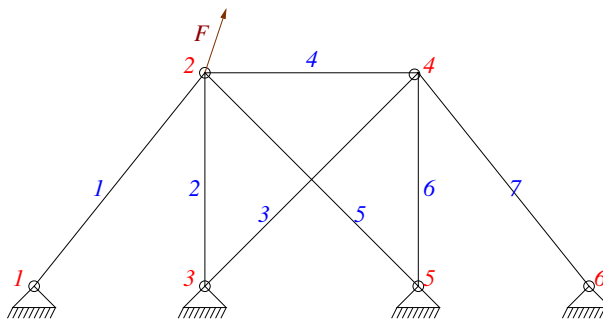


FIGURE 4.5 – Treillis constitué de 7 barres

Considérons une barre  $B_k$  de longueur  $l_k$  dont les extrémités sont les nœuds  $N_i$  et  $N_j$  sont de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$ . Le vecteur tangent à la barre, en supposant que l'abscisse curviligne va de  $N_i$  vers  $N_j$ , est définie par

$$[\mathbf{t}] = \frac{1}{l_k} \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{bmatrix}$$

Posons  $\mathbf{u}$  le déplacement de la barre sous l'action de force extérieure. On note par  $u_t$  le déplacement tangentiel :

$$u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$$

Chaque barre se déforme en traction compression uniquement et sur chaque barre nous avons une tension  $N_k$  qui entraîne une déformation via la loi de comportement (loi de Hooke)

$$N_k = ES \frac{du_t}{ds} \quad (4.8)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $S$  la section des barres,  $s$  désigne une abscisse curviligne et  $u_t$  est le déplacement tangentiel,  $s$ , autrement dit le déplacement dans la direction de la barre (déformation uniquement en traction compression).

L'énergie de déformation élastique de la barre  $B_k$  est alors donné par

$$W_k(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{B_k} \frac{1}{ES} N_k^2$$

L'énergie de déformation élastique structure treillis est simplement la somme des énergies de toutes les barres :

$$W(\mathbf{u}) = \sum_k W_k.$$

En théorie des treillis les seules forces non-négligées sont les forces ponctuelles s'appliquant aux nœuds de la structures, c'est à dire aux extrémités des barres. En conséquence, les tensions dans les barres sont toutes constantes, si bien que d'après la loi de Hooke (4.8), on obtient, en notant  $\Delta_x = x_j - x_i$ , et  $\Delta_y = y_j - y_i$  :

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{ES}{l_k} \begin{bmatrix} u_j^x - u_i^x & u_j^y - u_i^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} \\ &= \frac{ES}{l_k} \begin{bmatrix} \Delta_x & \Delta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^x - u_i^x \\ u_j^y - u_i^y \end{bmatrix} \\ &= \frac{ES}{l_k} \underbrace{\begin{bmatrix} -\Delta_x & -\Delta_y & \Delta_x & \Delta_y \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_j^x \\ u_j^y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où l'expression de la matrice (symétrique) de rigidité élémentaire de la barre  $b_k$  :

$$\begin{aligned} K_k &= \int_{B_k} \frac{1}{ES} B' * B \\ &= \frac{ES}{l_k} \begin{bmatrix} \Delta_x^2 & \Delta_x \Delta_y & -\Delta_y^2 & -\Delta_x \Delta_y \\ & \Delta_y^2 & -\Delta_x \Delta_y & -\Delta_y^2 \\ & & \Delta_x^2 & \Delta_x \Delta_y \\ & & & \Delta_y^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On construit la matrice de rigidité par *assemblage*, en sommant sur toutes les barres :

$$K = \frac{ES}{l\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{8} & 1 & -1 & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4+\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{8} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4+\sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2+\sqrt{8} & 1 & -1 & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1+\sqrt{8} & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 4+\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ & & & & & & 4+\sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 2+\sqrt{8} & -1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 1+\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 1+\sqrt{8} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En tenant compte des conditions aux limites (les nœuds 1 3 5 et 6 sont fixes), seuls quatre ddl (3, 4, 7 et 8) restent inconnus représentant les déplacements des nœuds 2 et 4. On a noté en rouge les composantes de la matrice de rigidité correspondantes.

Il reste alors à résoudre si l'unique charge  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$  est appliquée au nœud 2 :

$$\frac{ES}{l\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} & 0 \\ & 4 + \sqrt{8} & -\sqrt{8} & 0 \\ & & 4 + \sqrt{8} & 0 \\ & & & 4 + \sqrt{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^x \\ u_2^y \\ u_4^x \\ u_4^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# CHAPITRE 5

## Éléments-finis par l'exemple : Problèmes 2D

### 5.1 Exemple 2D sur maillage triangulaire : Problème de Poisson

Considérons le problème de poisson suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega \\ u &= 0 & \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^* = \int_{\Omega} f u^* \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{5.2}$$

**Théorème 5.1.1.** *Le problème (5.2) possède une unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus la solution minimise, dans  $H_0^1(\Omega)$ , la fonctionnelle  $J(v)$  :*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(v) - \int_{\Omega} f v.$$

*Interprétation physique :* Ce problème peut modéliser plusieurs problèmes, modulo des coef-

ficients correspondants :

- L'équilibre thermique d'un milieu représenté par  $\Omega$  soumis à une source de chaleur  $f$  et dont les températures aux bords sont imposés nulles.
- L'équilibre d'une membrane élastique sous l'action de force  $f$ , fixée tout le long de son bord.

Pour fixer les idées nous considérons un domaine carré  $\Omega = [0, 1]^2$ .

Le problème (5.1) modélise une diffusion, les conditions aux limites sont appelées ici condition de Dirichlet homogène. On lit aussi parfois problème de Dirichlet, voir par exemple [Bre80] pour une analyse fonctionnelle complète du problème.

### 5.1.1 Maillage triangulaire à 3 nœuds et interpolation $P^1$ de Lagrange

La discrétisation se base sur une subdivision du domaine en triangles. Cette subdivision est appelé maillage, qu'on qualifie ici de triangulaire.

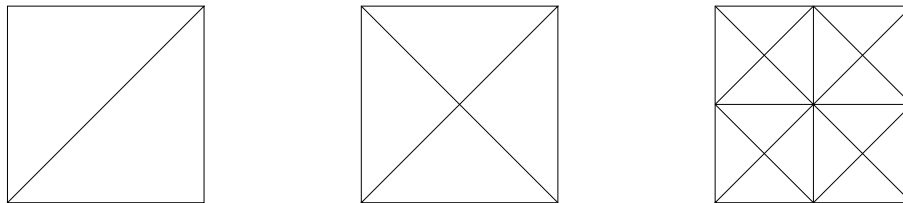


FIGURE 5.1 – 3 exemples de maillages triangulaires du carré  $\Omega$ .

Sur la figure 5.1, nous avons tracé 3 maillages triangulaires différents du domaine carré  $\Omega$ . Le premier à gauche est constitué de 2 éléments triangulaires construits à partir de 4 nœuds définissant les sommets des triangles ; chaque triangle (élément) étant défini par ses 3 sommets. La topologie des triangle peut être arbitraire à la seule condition que les noeuds définissant les triangles, et donc les éléments du maillage, soient exclusivement des sommets d'un triangle, autrement dit qu'un noeud ne doit pas se retrouver à l'intérieur d'une arête.

Naturellement la subdivision en triangles peut être une source d'erreur dépendant de la géométrie du domaine. Par exemple, un disque ne peut pas être exactement subdivisé en triangles ou même en quadrangle. Ceci est un autre problème, nous verrons ultérieurement comment estimer l'erreur qui peut résulter de l'approximation de la géométrie.

On désire maintenant choisir une interpolation polynomiale de degré 1 sur chaque élément (triangle) du maillage. Ce choix de fonctions de base vient d'abord du fait que c'est le choix le plus simple possible, à la fois dans sa définition mathématique et dans la pratique réelle.

Sur un triangle, un polynôme  $\phi$  de degré 1 est défini par trois constantes :

$$\phi(x, y) = a + bx + cy.$$



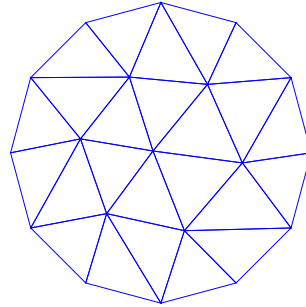


FIGURE 5.2 – Un maillage triangulaire d'un disque.

Il suffit donc de connaître sa valeur en trois points pour le déterminer. On procède comme en dimension 1 : si le maillage est constitué de  $n$  nœuds sommets, notés  $N_j$  et de coordonnées  $N_j = (x_j, y_j)$ , on définit  $n$  fonctions  $\phi_i$  polynomiales de degré 1 sur chaque élément par les relations :

$$\phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi définies, les fonctions  $\phi_i$  sont continues sur le maillage tout entier et sont des polynômes de

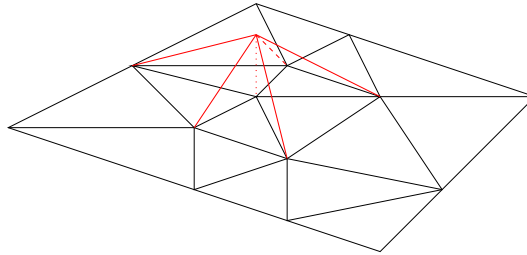


FIGURE 5.3 – Fonction chapeau sur un maillage triangulaire.

degré 1 sur chaque élément ; elles sont donc incluses dans l'espace  $H^1(\Omega)$ .

$$V = \text{vect}\{\phi_i, i = 1, \dots, n\} \subset H^1(\Omega).$$

Pour toute fonction  $u \in V$ , nous avons la décomposition :

$$u(x, y) = \sum_j u_j \phi_j(x, y),$$

Soit  $u \in V$  et soit  $\hat{u}$  sa représentation matricielle dans la base des fonctions  $\phi_i$  :

$$u = u_i \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}}_{\hat{u}}.$$

les composantes  $u_j$  représentent la valeur de  $u$  au nœud  $N_j = (x_j, y_j)$ .

### 5.1.2 Matrice de rigidité élémentaire

Comme dans le cas 1D, sur un éléments seuls trois fonctions de base sont non-nuls, ainsi la matrice de rigidité se construit par assemblage des matrices de rigidité élémentaire :

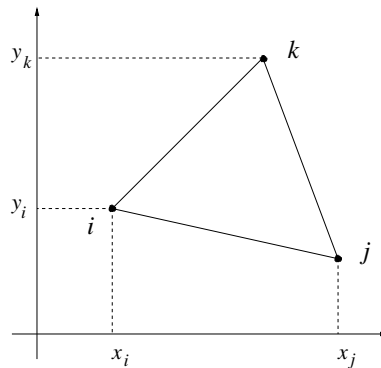


FIGURE 5.4 – Un élément triangulaire à 3 nœuds sommets

Sur un triangle  $E_l$  constitué par ses 3 nœuds sommets  $N_i, N_j$  et  $N_k$  (dans cet ordre), voir Fig 5.4, nous pouvons préciser les expressions de ces fonctions de base, par exemple

$$\phi_k(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_i & x_j \\ y & y_i & y_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_k & x_i & x_j \\ y_k & y_i & y_j \end{vmatrix}} = \frac{(x_i - x)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y)}{(x_i - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k)},$$

$\phi_i$  et  $\phi_j$  se déduisant par permutation circulaire.

On a donc la décomposition de  $u \in V$  qui se réduit à

$$u = \begin{bmatrix} \phi_i & \phi_j & \phi_k \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}}_{\hat{u}}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla u &= \begin{bmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{i,1} & \phi_{j,1} & \dots & \phi_{k,1} \\ \phi_{i,2} & \phi_{j,2} & \dots & \phi_{k,2} \end{bmatrix}}_B \hat{u} \end{aligned}$$

*Exercice* : Montrer que

$$B = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix}.$$

avec

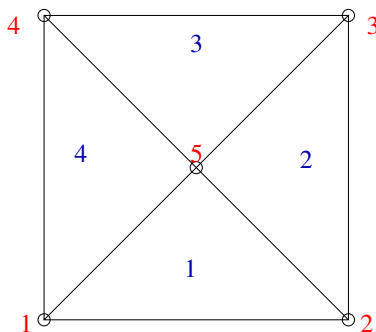
$$A = (x_i - x_k)(y_j - y_i) - (x_j - x_i)(y_i - y_k).$$

Remarquons qu'on a  $|A| = 2|E_l|$  et que la matrice  $B$  est constante.

On a alors la matrice de rigidité élémentaire

$$K_l = \int_{E_l} B' B. = |E_l| B' B$$

Afin d'illustrer plus en détail cet exemple, considérons un maillage du domaine carré  $\Omega = [0, 1]^2$  défini dans la figure 5.5



Élément	nœuds
1	1,2,5
2	2,3,5
3	3,4,5
4	1,4,5

FIGURE 5.5 – Un maillage triangulaire du carré en 4 éléments et 5 nœuds et le tableau de correspondance élément/nœuds.

*Exercice* : Montrer que pour le maillage décrit en Fig 5.5, on a avec les abus d'écriture

habituels

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Soit après assemblage :

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}$$

### 5.1.3 Calcul du second membre

Supposons pour simplifier et pour nous épargner pour le moment le tracas du calcul par quadrature des intégrales que  $f$  est uniforme sur  $\Omega$  dans le problème (4.2).

Le second membre se calcule également par assemblage sur tout les éléments du maillage. Sur un élément  $E_l$ , on a

$$L_l = \int_{E_l} f \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}$$

En se rappelant que la première colonne (resp. ligne) correspond au ddl associé au nœud  $i$  Dans le cas particulier du maillage décrit dans la figure 5.5, avec l'abus d'écriture habituel :

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = |E_l| \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Soit au final, par assemblage

$$L = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$

### 5.1.4 Prise en compte des conditions aux limites et résolution

Dans le problème (4.2) l'espace des solutions admissibles  $V_{adm} = H_0^1(\Omega)$ , c'est à dire que les solutions doivent être nul sur le bord de  $\Omega$ . Dans le maillage considéré, voir Fig. 5.5, seul le nœud 5 n'appartient pas au bord. Si que bien le problème élément-finis se réduit dans ce cas à

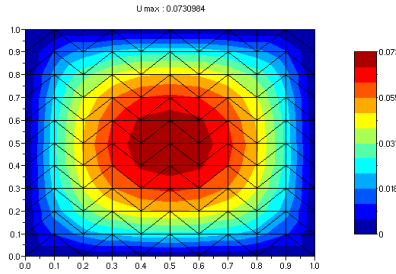


FIGURE 5.6 – Isovaleurs de la solution élément-finis par interpolation  $P^1$  du problème (4.2) avec un maillage triangulaire régulier de 200 éléments définis sur 121 nœuds.

une équation linéaire à une inconnue :

$$[4] [u_5] = [1/3]$$

Cela donne bien entendu une approximation grossière de la solution exacte. Pour avoir de meilleurs résultats, il faut raffiner le maillage, voici un résultat avec un maillage plus fin où nous avons tracé les isovaleurs de la solution éléments-finis :

## 5.2 Exemple 2D sur maillage quadrangulaire : Problème de Poisson avec condition de Dirichlet et condition de Neuman

Nous reprenons le même problème que précédemment, mais avec des conditions de Dirichlet non-homogène sur une partie  $\Gamma_1$  du bord  $\partial\Omega$  une condition de type Neumann sur la partie complémentaire  $\Gamma_2$  :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega \\ u &= u^{\Gamma_1} & \Gamma_1 \\ u_{,n} &= F & \Gamma_2 \end{aligned} \tag{5.3}$$

que l'on réécrit sous sa forme variationnelle équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u^* - u) = \int_{\Omega} f(u^* - u) + \int_{\Gamma_2} F(u^* - u) \quad \forall u^* \in V_{adm} \end{array} \right. \tag{5.4}$$

où

$$V_{adm} = \{u^* \in H^1(\Omega) \text{ telles que } u^*|_{\Gamma_1} = u^{\Gamma_1}\}$$

Remarquons que l'espace des solutions admissible  $V_{adm}$  n'est pas un espace vectoriel. Nous définissons également l'espace vectoriel associé à  $V_{adm}$  :

$$V_{admh} = \{u^* \in H^1(\Omega) \text{ telles que } u^*|_{\Gamma_1} = 0\}$$

Si bien que le problème (5.4) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_{adm} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u^*) = \int_{\Omega} f(u^*) + \int_{\Gamma_2} F(u^*) \quad \forall u^* \in V_{admh}(\Omega) \end{cases}$$

**Théorème 5.2.1.** *Le problème (5.4) possède une unique solution dans  $V_{adm}$ . De plus la solution minimise dans  $V_{adm}$  la fonctionnelle  $J(v)$  :*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(v) - \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_2} F v.$$

*Interprétation physique :* pour reprendre la modélisation d'un problème thermique à l'équilibre,  $u^{\Gamma_1}$  s'interprète comme une température imposée sur  $\Gamma_1$  et  $F$  est un flux de chaleur imposée sur  $\Gamma_2$ .

### 5.2.1 Maillage quadrangulaire à 4 noeuds et interpolation linéaire

La discrétisation se base sur une décomposition du domaine en quadrangles, comme sur la figure 5.7, où nous présentons différents maillages quadrangulaires du carré  $\Omega$  :

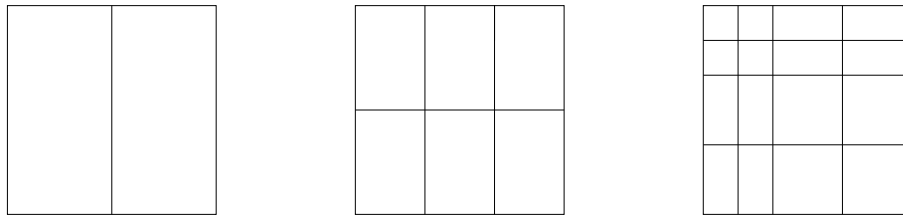


FIGURE 5.7 – 3 exemples de maillages quadrangulaire du carré  $\Omega$ .

Chaque élément quadrangulaire est donc simplement défini par une liste de 4 noeuds représentant les 4 sommets.

Un maillage sera donc typiquement défini par une liste de noeuds, défini par leur coordonnées, et une liste d'éléments définis chacun par 4 numéros représentant les 4 noeuds sommets, voir par exemple la figure 5.9.

Comptes tenu des conditions aux limites, nous établissons plusieurs listes de noeuds correspondants :

On notera

- $L1$  = la liste des noeuds appartenant à la frontière  $\Gamma_1$ ,
- $L2$  = la liste des noeuds appartenant à la frontière  $\Gamma_2$ ,
- $L3$  = la liste des noeuds n'appartenant pas à la frontière.

## 5.2.2 Interpolation linéaire sur un quadrangle

On choisit de chercher une approximation de la solution de (5.4) par la méthode des éléments-finis avec une interpolation linéaire, engendré par  $1, x, y, xy$ , sur un **maillage quadrangulaire**.

Soit une décomposition ou maillage quadrangulaire de  $\Omega = \bigcup_k E_k$  où les éléments  $E_k$  sont tous des quadrangles,  $n_e$  désigne le nombre d'éléments du maillage et  $n$  le nombre de noeuds. On dit interpolation linéaire, bien que qu'ils'agisse de polynômes de degré 2, car nous verrons que les fonctions de bases sont choisies linéaires aux arêtes.

On désigne les noeuds du maillage par  $N_j$ , avec  $j = 1, 2, \dots, n$ , ou plus simplement par leur numéro. Soit  $\Phi_i$  la fonction  $P^2$  définie sur  $\Omega$ , combinaison linéaire de  $1, x, y, xy$  sur chacun des éléments  $E_k$  et telle que

$$\Phi_i(N_j) = \delta_{ij}, \quad (5.5)$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker. Il est clair que sur chaque élément  $E_k$ , les fonctions  $\Phi_j$  sont uniquement définies par (5.5).

On remarque plusieurs propriétés importantes :

- Une fonction  $\Phi_i$  est nulle sur chaque élément de la décomposition (ou maillage) sauf sur les éléments dont le noeud  $N_j$  est un des quatres sommets.
- Les fonctions  $\Phi_i$  sont des fonctions affines le long des arêtes des éléments.
- Les fonctions  $\Phi_i$  sont continues sur tout  $\Omega$ , mais leur dérivées sont discontinues aux arêtes.
- les fonctions  $\Phi_i$  forment une partition de l'unité :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i = 1 \quad \text{sur } \Omega.$$

On désigne par  $V^h$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $\Phi_i$ . Il est clair que  $V^h \subset H^1(\Omega)$  et que  $V^h$  est de dimension  $n$ .

Toute fonction  $v^* \in V^h$  se décompose alors de façon unique dans la base des  $\Phi_i$  :

$$v^* = v_i^* \Phi_i,$$

On note de façon vectorielle :

$$[v^*] = \hat{\Phi}^T \hat{v}^*,$$

où

$$\hat{v}^* = \begin{bmatrix} v_1^* & \dots & v_i^* & \dots & v_n^* \end{bmatrix}^\top,$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_i & \dots & \Phi_n \end{bmatrix}^\top.$$

On note également

$$V_{adm}^h = V_{adm} \cap V^h, \quad V_{admh}^h = V_{admh} \cap V^h,$$

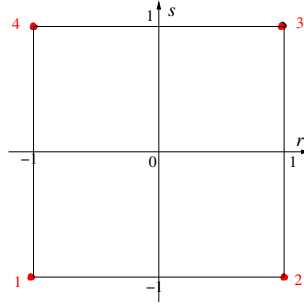
autrement dit :

$$V_{adm}^h = \{v^* \in V^h \text{ tel que } v_i^* = u^{\Gamma_1}(N_i)\}$$

$$= \{v^* \in V^h \text{ tel que } C\hat{v}^* = \hat{u}^{\Gamma_1}\}.$$

### 5.2.3 Élément de référence et formule de Jacobi

Contrairement au cas des éléments triangulaires à trois noeuds, les fonctions  $\Phi_i$  sont déterminés à partir de leur définition, notée  $\phi$ , sur un élément de référence, ce qui reflète la pratique habituelle avec la méthode des éléments finis



$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad \phi_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad \phi_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

Pour une fonction  $f$  définie sur  $E_l$ , on a :

$$f_\alpha(x, y) = f_i\Phi_i(x, y) + f_j\Phi_j(x, y) + f_k\Phi_k(x, y) + f_m\Phi_m(x, y)$$

$$= f_i\phi_1(r, s) + f_j\phi_2(r, s) + f_k\phi_3(r, s) + f_m\phi_4(r, s)$$

où  $f_i, f_j, f_k, f_m$  désignent respectivement les valeurs de  $f$  aux noeuds  $N_i, N_j, N_k, N_m$ .

De même, pour un quadrangle  $E_l$  défini par quatre noeuds sommets  $N_i, N_j, N_k, N_m$ , on définit le changement de variable par l'application  $T$  :

$$T(r, s) = \begin{cases} x = x_i\phi_1(r, s) + x_j\phi_2(r, s) + x_k\phi_3(r, s) + x_m\phi_4(r, s) \\ y = y_i\phi_1(r, s) + y_j\phi_2(r, s) + y_k\phi_3(r, s) + y_m\phi_4(r, s) \end{cases}$$



**Remarque 5.2.2.** *Il est important de souligner que dans cet exemple, ainsi que dans le cas d'une interpolation linéaire pour un maillage en triangle à trois noeuds, les mêmes fonctions d'interpolations  $\Phi_i$  sont utilisées pour représenter une approximation de la solution cherchée et pour représenter la géométrie du maillage. On dit que ce sont des éléments **isoparamétriques**.*

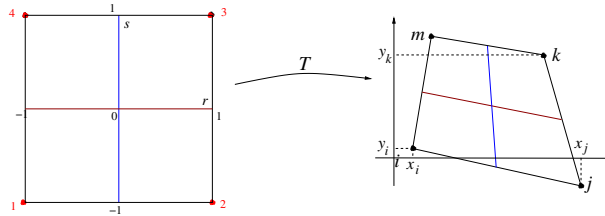


FIGURE 5.8 –  $T$  relie un élément quelconque à l'élément de référence

Rappelons la formule de changement de variable (formule de Jacobi) pour le calcul d'une intégrale :

$$\int_{E=T(E_r)} f(r,s) dx dy = \int_{E_r} f(r,s) |\det J_T| dr ds$$

où  $J_T$  est la matrice Jacobienne du changement de variable

$$J_T = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix}$$

On remarque que

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{,r}^T \hat{x} & \hat{\phi}_{,r}^T \hat{y} \\ \hat{\phi}_{,s}^T \hat{x} & \hat{\phi}_{,s}^T \hat{y} \end{bmatrix},$$

où on a désigné

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \\ x_l \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \\ y_l \end{bmatrix}, \quad \hat{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix},$$

Dans un problème scalaire la numérotation des noeuds et des ddl coïncident.

Le gradient de la fonction scalaire  $u$  est représenté sous la forme d'un vecteur :

$$[\nabla(u)] = \begin{bmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{bmatrix}$$

Sur un élément quadrangulaire  $E_l$  dont les sommets sont les noeuds  $N_i, N_j, N_k, N_m$  seuls les quatres fonctions  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_m$  de  $V^h$  sont non nuls, si bien que dans  $E_l$  :

$$\begin{aligned}
 [u] &= [\Phi_i \quad \Phi_j \quad \Phi_k \quad \Phi_m] \hat{u} \\
 &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] \hat{u}
 \end{aligned}$$

où on note dans  $E_l$  :

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} u^i \\ u^j \\ u^k \\ u^m \end{bmatrix}$$

On a

$$[\nabla_{r,s}(u)] = B_r \hat{u}$$

avec

$$B_{rs} = \begin{bmatrix} \phi_{1,r} & \phi_{2,r} & \phi_{3,r} & \phi_{4,r} \\ \phi_{1,s} & \phi_{2,s} & \phi_{3,s} & \phi_{4,s} \end{bmatrix}$$

On montre facilement que

$$[\nabla_{r,s}(u)] = J_T [\nabla_{x,y}(u)].$$

Si on note la matrice  $B$  telle que

$$[\nabla_{x,y}(u)] = B \hat{u}.$$

on a alors

$$B = [J_T]^{-1} B_r.$$

La matrice (de rigidité) élémentaire  $K_l$  telle que pour tout  $u$  et  $u^*$  de  $V^h$ , on ait

$$\int_{E_l} \nabla(u) \cdot \nabla(u^*) = \hat{u}' K_l \hat{u}^*$$

est alors donné par

$$K_l = \int_{E_R} B' B |\det J_T|.$$

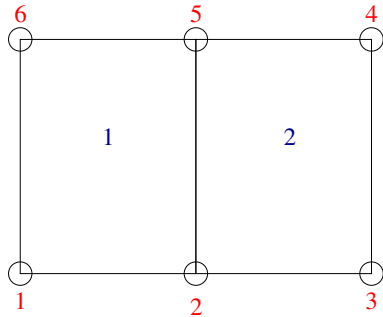
On utilisera une intégration numérique de Gauss à 4 noeuds, voir Annexe 7.4.3

*Exercice* : Verifier que

$$\begin{aligned}
 \widehat{\phi}_{,r}^\top &= [s-1 \quad 1-s \quad 1+s \quad -(1+s)], \\
 \widehat{\phi}_{,s}^\top &= [r-1 \quad -(1+r) \quad 1+r \quad 1-r].
 \end{aligned}$$

Exercice : Déterminer le vecteur  $L_l$  tel que

$$\int_{E_l} f u^* = L_l' \hat{u}^*$$



Élément	nœuds
1	1,2,5,6
2	2,3,4,5

FIGURE 5.9 – Un maillage quadrangulaire en 2 éléments et 6 nœuds et le tableau de correspondance éléments/nœuds

### 5.3 Element MITC4 pour les plaques en flexion

Soit un problème de plaque en flexion dont les déplacements sont donnés par

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -z\beta_x \\ -z\beta_y \\ w \end{bmatrix}$$

les déformations en flexions sont caractérisés par le tenseur

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,x} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix}$$

et le cisaillement est défini par

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{bmatrix}$$

Pour un matériau homogène et isotrope cela correspond à des contraintes

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{-zE}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,x} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{bmatrix}$$

Considérons un quadrangle quelconque :

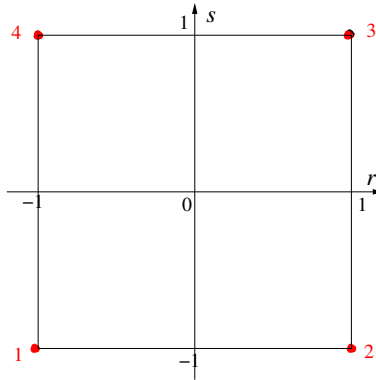


FIGURE 5.10 –

Nous définissons la famille de fonctions d'interpolation polynomiale de degré 2 telle que

$$\phi_i(j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

soit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4}(r-1)(s-1) \\ \phi_2 &= \frac{1}{4}(r+1)(1-s) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}(r+1)(s+1) \\ \phi_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(s+1) \end{aligned} \tag{5.6}$$

si bien qu'on peut définir un point de la plaque sur la base de ce quadrangle par

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi_i(r, s)x_i \\ \phi_i(r, s)y_i \\ z \end{bmatrix}$$

Sur un quadrangle quelconque, définissons la base covariante

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{x}_{,r}$$

$$\mathbf{g}_s = \mathbf{x}_{,s}$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,z}$$

On définit la base contravariante (duale)  $\mathbf{g}^j$  :

$$\mathbf{g}_i \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad i, j = r, s, 3.$$

On définit alors les composantes covariantes du tenseur de déformation

$$\gamma_{x3} = \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z)$$

$$\gamma_{y3} = \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z)$$

or puisque  $\mathbf{g}_z = \mathbf{e}_z$ , on a simplement,

$$\gamma_{x3} = \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x)$$

$$\gamma_{y3} = \gamma_{rz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y) + \gamma_{sz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y)$$

On définit l'interpolation du tenseur des contraintes de cisaillement sur la base de leur valeur aux nœuds  $A, B, C, D$  :

$$\gamma_{r3} = \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{r3}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{r3}^C$$

$$\gamma_{s3} = \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{s3}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{s3}^B$$

D'après l'interpolation choisie, il vient

$$\gamma_{r3}^A = \frac{1}{2}(w^3 - w^4) + \frac{1}{2}(\beta_x^3 + \beta_x^4)(x_3 - x_4) + \frac{1}{2}(\beta_y^3 + \beta_y^4)(y_3 - y_4)$$

$$\gamma_{s3}^B = \frac{1}{2}(w^4 - w^1) + \frac{1}{2}(\beta_x^1 + \beta_x^4)(x_4 - x_1) + \frac{1}{2}(\beta_y^1 + \beta_y^4)(y_4 - y_1)$$

$$\gamma_{r3}^C = \frac{1}{2}(w^2 - w^1) + \frac{1}{2}(\beta_x^1 + \beta_x^2)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(\beta_y^1 + \beta_y^2)(y_2 - y_1)$$

$$\gamma_{s3}^D = \frac{1}{2}(w^3 - w^2) + \frac{1}{2}(\beta_x^2 + \beta_x^3)(x_3 - x_2) + \frac{1}{2}(\beta_y^2 + \beta_y^3)(y_3 - y_2)$$

autrement dit on a

$$\begin{bmatrix} \gamma_{r3}^A \\ \gamma_{s3}^B \\ \gamma_{r3}^C \\ \gamma_{s3}^D \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & -1 & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \\ -1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ -1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 1 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 1 & x_3 - x_2 & y_2 - y_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_c} \begin{bmatrix} w^1 \\ \beta_x^1 \\ \beta_y^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^4 \\ \beta_x^4 \\ \beta_y^4 \end{bmatrix}$$

Soit au final

$$\begin{bmatrix} \gamma_{x3} \\ \gamma_{y3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x \\ \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & r-1 & 0 & r+1 \end{bmatrix}}_{B_s} B_C \begin{bmatrix} w^1 \\ \beta_x^1 \\ \beta_y^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^4 \\ \beta_x^4 \\ \beta_y^4 \end{bmatrix}$$

# CHAPITRE 6

## Éléments-finis par l'exemple : Problèmes 3D

### 6.1 Exemple 3D : Mécanique des milieux continus

On considère un problème général de la mécanique des milieux continus sous sa forme variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V_{adm} \text{ telle que} \\ \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_{adm} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

où

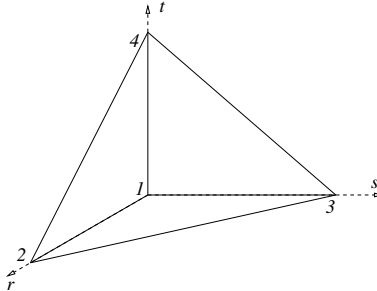
$$V_{adm} = \{\mathbf{u}^* \in [H^1(\Omega)]^3 / \mathbf{u}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_0\}$$

et  $\bar{\sigma}$  est le tenseur des contraintes lié au tenseur des déformations  $\bar{\varepsilon}$  par la loi de comportement qu'on écrit sous forme matricielle pour des raisons informatiques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ & 1-\nu & \nu & & & \\ & & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & \\ & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \end{bmatrix}$$

### 6.1.1 Élément tétraédrique à 4 nœuds

On considère l'élément de référence : un tétraèdre à quatre nœuds dont les coordonnées sont  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  et  $(0,0,1)$ .



Sur cet élément de référence, nous définissons les 4 fonctions de base :

$$\phi_1 = 1 - (r + s + t)$$

$$\phi_2 = r$$

$$\phi_3 = s$$

$$\phi_4 = t$$

Si on considère un élément tétraédrique arbitraire dont les sommets sont de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ , tout point de l'élément peut être défini par le paramétrage

$$\begin{bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i(r, s, t)x_i \\ \phi_i(r, s, t)y_i \\ \phi_i(r, s, t)z_i \end{bmatrix} = T(r, s, t)$$

$T$  est le difféomorphisme qui envoie l'élément de référence à l'élément considéré. Nous avons la formule de Jacobi (changement de variable) :

$$\int_{E_{reel}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{E_{ref}} f(x, y, z) |\det J_T| dr ds dt$$

où  $J_T$  est la jacobienne de  $T$  :

$$J_T = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix}$$

En notant

$$\hat{\phi}^T = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4],$$



on a

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{,r} & \hat{\phi}_{,s} & \hat{\phi}_{,t} \end{bmatrix}$$

soit

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs on a

$$f_{,r} = x_{,r}f_{,x} + y_{,r}f_{,y} + z_{,r}f_{,z}$$

$$f_{,s} = x_{,s}f_{,x} + y_{,s}f_{,y} + z_{,s}f_{,z}$$

$$f_{,t} = x_{,t}f_{,x} + y_{,t}f_{,y} + z_{,t}f_{,z}$$

c'est à dire :

$$\nabla_{r,s,t} f = J_T^\top \nabla_{x,y,z} f,$$

ou encore

$$\nabla_{x,y,z} f = J_T^\top \nabla_{r,s,t} f =,$$

Notons

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \\ u_{x,z} \\ u_{y,x} \\ u_{y,y} \\ u_{y,z} \\ u_{z,x} \\ u_{z,y} \\ u_{z,z} \end{bmatrix} \text{ et } \nabla_{r,s,t} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,r} \\ u_{x,s} \\ u_{x,t} \\ u_{y,r} \\ u_{y,s} \\ u_{y,t} \\ u_{z,r} \\ u_{z,s} \\ u_{z,t} \end{bmatrix} = B_r \hat{u}$$

avec

$$B_r = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc,

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} \nabla_{r,s,t} \mathbf{u}$$

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} = B_E \nabla_{x,y,z} \mathbf{u}$$

with

$$B_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, nous avons

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = B \hat{u}$$

avec

$$B = B_E * \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} * B_r$$

on a

$$J_T^{-1} \dagger [$$

## 6.1.2 Élément prisme à 6 noeuds

On considère l'élément de référence dont les coordonnées sont  $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1)$ . Sur cet élément de référence, nous définissons les 6 fonctions de base :

$$\phi_1 = (1 - r - s)(1 - t)$$

$$\phi_2 = r(1 - t)$$

$$\phi_3 = s(1 - t)$$

$$\phi_4 = (1 - r - s)t$$

$$\phi_5 = rt$$

$$\phi_6 = st$$

Si on considère un élément prisme arbitraire dont les sommets sont de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ , tout point de l'élément peut être défini par le paramétrage

$$\begin{bmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ z(r, s, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i(r, s, t)x_i \\ \phi_i(r, s, t)y_i \\ \phi_i(r, s, t)z_i \end{bmatrix} = T(r, s, t)$$

$T$  est le difféomorphisme qui envoie l'élément de référence à l'élément considéré. Nous avons la formule de Jacobi (changement de variable) :

$$\int_{E_{reel}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{E_{ref}} f(x, y, z) |\det J_T| dr ds dt$$

où  $J_T$  est la jacobienne de  $T$  :

$$J_T = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} & z_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} & z_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} & z_{,t} \end{bmatrix}$$

En notant

$$\hat{\phi}^\top = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6],$$

on a

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{,r} & \hat{\phi}_{,s} & \hat{\phi}_{,t} \end{bmatrix}$$

soit

$$J_T = \begin{bmatrix} \hat{x}^\top \\ \hat{y}^\top \\ \hat{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs on a

$$f_{,r} = x_{,r}f_{,x} + y_{,r}f_{,y} + z_{,r}f_{,z}$$

$$f_{,s} = x_{,s}f_{,x} + y_{,s}f_{,y} + z_{,s}f_{,z}$$

$$f_{,t} = x_{,t}f_{,x} + y_{,t}f_{,y} + z_{,t}f_{,z}$$

c'est à dire :

$$\nabla_{r,s,t} f = J_T^\top \nabla_{x,y,z} f,$$

ou encore

$$\nabla_{x,y,z} f = J_T^\top \nabla_{r,s,t} f =,$$

Notons

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{x,y} \\ u_{x,z} \\ u_{y,x} \\ u_{y,y} \\ u_{y,z} \\ u_{z,x} \\ u_{z,y} \\ u_{z,z} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_{r,s,t} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{x,r} \\ u_{x,s} \\ u_{x,t} \\ u_{y,r} \\ u_{y,s} \\ u_{y,t} \\ u_{z,r} \\ u_{z,s} \\ u_{z,t} \end{bmatrix} = B_r \hat{\mathbf{u}}$$

On a donc,

$$\nabla_{x,y,z} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} \nabla_{r,s,t} \mathbf{u}$$

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \end{bmatrix} = B_E \nabla_{x,y,z} \mathbf{u}$$

Ainsi, nous avons

$$\hat{\varepsilon}_{x,y,z} = B \hat{\mathbf{u}}$$

avec

$$B = B_E * \begin{bmatrix} J_T^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_T^{-1} \end{bmatrix} * B_r$$

on a

$$J_T^{-1} \nabla [$$

### 6.1.3 Élément cubique à 8 nœuds

Pour un cube à 8 nœuds, on fait pareil on définit les huit fonctions dans un élément de référence  $[0, 1]^3$  :

$$\phi_1 = (1-r)(1-s)(1-t)$$

$$\phi_2 = r(1-s)(1-t)$$

$$\phi_3 = rs(1-t)$$

$$\phi_4 = (1-r)s(1-t)$$

$$\phi_5 = (1-r)(1-s)t$$

$$\phi_6 = r(1-s)t$$

$$\phi_7 = rst$$

$$\phi_8 = (1-r)st$$

on a

$$\hat{\phi}_{,r} = \begin{bmatrix} (s-1)(1-t) & (1-s)(1-t) & s(1-t) & s(t-1) & (s-1)t & (1-s)t & st & -st \end{bmatrix}$$

$$\hat{\phi}_{,s} = \begin{bmatrix} (r-1)(1-t) & r(t-1) & r(1-t) & (1-r)(1-t) & (r-1)t & -rt & rt & (1-r)t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\phi}_{,s} = \begin{bmatrix} (r-1)(1-s) & r(s-1) & -rs & (r-1)s & (1-r)(1-s) & r(1-s) & rs & (1-r)s \end{bmatrix}$$



## CHAPITRE 7

# Annexes : Rappels de Mathématiques

Dans cette annexe, nous présentons les outils de calculs de variation et d'optimisation omniprésents dans la pratique des éléments finis.

### 7.1 Rappels en algèbre linéaire, analyse matricielle

Commençons par un résultat fondamental sur les matrices symétriques

**Théorème 7.1.1.** *Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice carrée symétrique,  $n \times n$ , alors il existe une matrice orthogonale  $U$  et une matrice diagonale  $D$  telles que*

$$A = U^T D U.$$

*Autrement dit, les matrices symétriques sont toujours diagonalisables dans une base de vecteurs propres orthonormée.*

### 7.2 Rappels d'optimisation quadratique

**Théorème 7.2.1.** *(Condition d'optimalité sur un convexe) – Soit  $J$  une fonctionnelle deux fois différentiable sur un espace de Banach  $E$ . Soit  $K \subset E$  un sous-ensemble convexe et fermé sur lequel  $J$  est strictement convexe.*

$u$  minimise  $J$  sur  $K$  si et seulement si

$$(\nabla J(u), u^* - u) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

### 7.3 Théorèmes de projection

**Théorème 7.3.1.** – (Stampacchia) – Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $K$  un convexe fermé de  $H$ , alors  $\forall u \in H, \exists ! u_k \in K$  tel que

$$\|u - u^*\|_H \geq \|u - u_k\|_H \quad \forall u^* \in K.$$

De plus, on a

$$(u - u_k, u^* - u_k) \leq 0 \quad \forall u^* \in K.$$

*Démonstration.* Commençons par montrer l'existence.

Soit

$$d = \inf_{u^* \in K} \|u - u^*\|_H^2,$$

alors il existe une suite  $u_n \in K$  telle que

$$\|u - u_n\|_H^2 \leq d + \frac{1}{n}.$$

On va simplement montrer que la suite  $u_n$  est de Cauchy. Grâce à l'identité du parallélogramme :

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2(x, x) + 2(y, y)$$

on écrit :

$$2\|u - u_n\|_H^2 + 2\|u - u_m\|_H^2 = \|u_n - u_m\|_H^2 + \|2u - u_n + u_m\|_H^2.$$

D'où, en reportant :

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = 2\|u - u_n\|_H^2 + 2\|u - u_m\|_H^2 - 4\|u - \frac{u_n + u_m}{2}\|_H^2.$$

Comme  $K$  est convexe,  $(u_n + u_m)/2$  appartient également à  $K$  et donc

$$\|u - \frac{u_n + u_m}{2}\|_H^2 \geq d.$$

Ainsi,

$$\|u_n - u_m\|_H^2 \leq 2(d + \frac{1}{n}) + 2(d + \frac{1}{m}) - 4d \leq 2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}),$$

ce qui prouve que la suite  $u_n$  est de Cauchy. On en déduit qu'il existe une limite  $u_k \in K$  puisque



$K$  est fermé.

Montrons maintenant que la limite  $u_k$  est unique : Supposons qu'on ait également  $u_l$  tel que

$$\|u - u_k\|_H^2 = \|u - u_l\|_H^2 = d,$$

alors en faisant le même calcul que précédemment, on aurait

$$\|u_k - u_l\|_H^2 \leq 2d + 2d - 4d = 0.$$

□

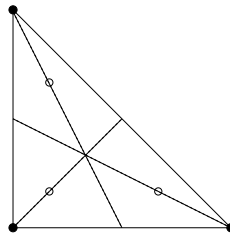
## 7.4 Intégration numérique de Gauss

Une intégrale est approchée numériquement par une formule de quadrature :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \sum_i w_i f(x_i)$$

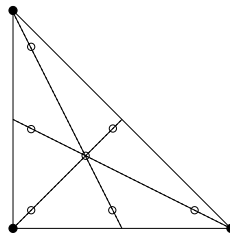
où  $x_i$  sont les noeuds d'intégration et  $w_i$  sont les poids.

### 7.4.1 3 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence



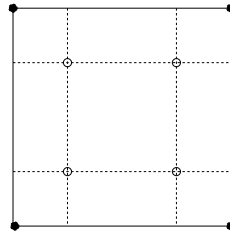
$r_1 = 1/6$	$s_1 = 1/6$	$w_1 = 1/3$
$r_2 = 2/3$	$s_2 = 1/6$	$w_2 = 1/3$
$r_3 = 1/6$	$s_3 = 2/3$	$w_3 = 1/3$

### 7.4.2 7 noeuds d'intégration de Gauss sur un triangle de référence



$r_1 = 0.1012865073235$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 0.1259391605448$
$r_2 = 0.7974269863531$	$s_2 = r_1$	$w_2 = w_1$
$r_3 = r_1$	$s_3 = r_2$	$w_3 = w_1$
$r_4 = 0.4701420641051$	$s_4 = r_6$	$w_4 = 0.1323941527885$
$r_5 = r_4$	$s_5 = r_4$	$w_5 = w_4$
$r_6 = 0.0597158717898$	$s_6 = r_4$	$w_6 = w_4$
$r_7 = 1/3$	$s_7 = r_7$	$w_7 = 0.225$

### 7.4.3 4 noeuds d'intégration de Gauss sur un quadrangle de référence



$r_1 = -0.577350296189626$	$s_1 = r_1$	$w_1 = 1/4$
$r_2 = r_1$	$s_2 = r_3$	$w_2 = 1/4$
$r_3 = 0.577350296189626$	$s_3 = r_1$	$w_3 = 1/4$
$r_4 = r_3$	$s_4 = r_3$	$w_4 = 1/4$

## Bibliographie

- [Bat96] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [Bre80] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1980.
- [LM68] Jacques-Louis Lions and Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non-homogènes et applications*. Dunod, 1968.
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*. Butterworth Heinemann, fifth edition, 2000.