



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER



FACULTÉ DES SCIENCES

HA8201H - Maths PEIP S2

Examen - Session 2 du 22/06/2026

Correction

**Exercice 1** (Sous-espaces vectoriels).

Les parties suivantes de  $\mathbb{R}^2$  sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Justifier votre réponse.

- a)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ .
- b)  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$ .
- c)  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ .

**Correction.**

- a) —  $(0, 0) \in E$  car  $0 + 0 = 0$ .  
— Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  dans  $E$ . Par définition de  $E$ , on a  $x_1 + y_1 = 0$  et  $x_2 + y_2 = 0$ .  
De plus,  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ . Comme

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0,$$

on en déduit que  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in E$ .

- Soient  $(x, y) \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par définition de  $E$ , on a  $x + y = 0$ . De plus,  $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ . Comme

$$\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

on en déduit que  $\lambda(x, y) \in E$ .

Il suit que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

- b) Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

De plus,

$$(x + y)^2 = 0 \iff x + y = 0.$$

Ainsi,

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = E.$$

Il suit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

- c)  $G$  n'est pas stable par somme. Par exemple,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  sont dans  $G$  mais leur somme  $(1, 1)$  n'est pas dans  $G$ .  $G$  n'est donc pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2** (Base et matrice).

Soit  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  la famille des trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$\varphi(x, y, z) = (2x - 2y, x - y, x - z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- b) Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Correction.**

- a) On calcule le déterminant associé

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

en développant suivant la troisième colonne. Le déterminant étant non nul, on en déduit que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- b) On peut calculer directement les coordonnées des images de  $v_1, v_2, v_3$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= (0, 0, 0) = 0.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3, \\ \varphi(v_2) &= (0, 0, 1) = v_1 - v_2, \\ \varphi(v_3) &= (2, 1, 1) = v_1 + v_3. \end{aligned}$$

Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3** (Applications linéaires).

Soit  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2). Pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose

$$f(P) = 2XP - X^2P'.$$

- a) Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
b) Donner la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
c) Déterminer une base de  $\ker f$ .  
d) En déduire la dimension de  $\text{Im} f$  par le théorème du rang.  
e) Déterminer une base de  $\text{Im} f$ .

**Correction.**

a) Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Alors  $P' = 2aX + b$  et

$$f(P) = 2X.(aX^2 + bX + c) - X^2.(2aX + b) = bX^2 + 2cX \in \mathbb{R}_2[X].$$

L'application  $f$  est donc bien définie de  $\mathbb{R}_2[X]$  vers  $\mathbb{R}_2[X]$ . La linéarité de  $f$  provient de la linéarité de la dérivation.

— Soient  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ . Alors

$$\begin{aligned} f(P_1 + P_2) &= 2X(P_1 + P_2) - X^2(P_1 + P_2)' = 2X(P_1 + P_2) - X^2(P_1' + P_2') \\ &= (2XP_1 - X^2P_1') + (2XP_2 - X^2P_2') = f(P_1) + f(P_2). \end{aligned}$$

— Soient  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$f(\lambda P) = 2X(\lambda P) - X^2(\lambda P)' = 2X(\lambda P) - X^2(\lambda P') = \lambda(2XP - X^2P') = \lambda f(P).$$

Il suit que  $f$  est linéaire.

b) On calcule les coordonnées des images de  $1, X, X^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2X.1 - X^2.0 = 2X, \\ f(X) &= 2X.X - X^2.1 = X^2, \\ f(X^2) &= 2X.X^2 - X^2.(2X) = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ . Comme

$$f(P) = 0 \iff bX^2 + 2cX = 0 \iff b = 0, 2c = 0 \iff b = c = 0 \iff P = aX^2,$$

on obtient

$$\ker f = \text{Vect}(X^2).$$

Ainsi la famille à un vecteur  $(X^2)$  est une base de  $\ker f$  qui est de dimension 1.

d) Le théorème du rang donne

$$\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \ker f = 3 - 1 = 2.$$

e) On sait que  $\text{Im} f$  est engendré par les vecteurs colonnes de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Donc

$$\text{Im} f = \text{Vect}(2X, X, 0) = \text{Vect}(2X, X^2).$$

La famille  $(2X, X^2)$  est donc génératrice de  $\text{Im} f$ . Comme  $\text{Im} f$  est de dimension 2 par d), on en conclut que  $(2X, X^2)$  est une base de  $\text{Im} f$ .

**Exercice 4** (Calculs d'intégrales).

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_0^1 x^2 e^x dx$

b)  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^3 x dx$

c)  $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

**Correction.**

a) On effectue une première IPP en utilisant  $u(x) = x^2$  et  $v'(x) = e^x$ . Alors  $u'(x) = 2x$  et  $v(x) = e^x$ . Il suit

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

On effectue une seconde IPP en utilisant  $u(x) = x$  et  $v'(x) = e^x$ . Alors  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = e^x$ . On obtient

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

Au final, on a

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$$

b) On effectue le changement de variable  $u = \sin x$ . Alors  $du = \cos x dx$  et

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^3 x dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) \sin^3 x \cos x dx \\ &= \int_0^1 (1 - u^2) u^3 du = \int_0^1 (u^3 - u^5) du = \left[ \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

c) On effectue le changement de variable  $u = x^2 + 1$ . Alors  $du = 2x dx$  et

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} [\ln u]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln(\sqrt{2}).$$

**Exercice 5** (Développements limités).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = (1 + x)^3 + 6 \cos x$ .

a) Calculer le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3.

b) En utilisant ce développement limité, déterminer l'équation de la tangente au graphe de  $f$  au point  $(0, 7)$ . Que peut-on dire de la position du graphe de  $f$  par rapport à la tangente au voisinage de ce point ?

**Correction.**

a) Le développement limité de  $\cos x$  en 0 à l'ordre 3 est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Alors le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3 est

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^3 + 6 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 6 - 3x^2 + o(x^3) \\ &= 7 + 3x + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

b) On a donc  $f(0) = 7$  et  $f'(0) = 3$ . Ainsi la tangente au graphe de  $f$  au point  $(0, 7)$  est la droite d'équation

$$y = 7 + 3x.$$

Comme

$$f(x) - (7 + 3x) = x^3 + o(x^3),$$

on en déduit que la courbe de  $f$  est au dessus de la tangente pour  $x > 0$  et en dessous pour  $x < 0$ . La courbe croise la tangente en 0.