



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES



HA8201H - Maths PEIP S2

Examen - Session 2 du 22/06/2026

Durée : 2 heures

Documents, calculatrices et objets connectés interdits

Les différents exercices de ce contrôle sont entièrement indépendants. Toute réponse doit être justifiée. La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels).

Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Justifier votre réponse.

- a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.
- b) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$.
- c) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

Exercice 2 (Base et matrice).

Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ la famille des trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(x, y, z) = (2x - 2y, x - y, x - z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 (Applications linéaires).

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2). Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$f(P) = 2XP - X^2P'.$$

- a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

- b) Donner la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
- c) Déterminer une base de $\ker f$.
- d) En déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$ par le théorème du rang.
- e) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 4 (Calculs d'intégrales).

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^3 x dx$

c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$

Exercice 5 (Développements limités).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1 + x)^3 + 6 \cos x$.

- a) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
- b) En utilisant ce développement limité, déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, 7)$. Que peut-on dire de la position du graphe de f par rapport à la tangente au voisinage de ce point ?