



Corrigé de l'examen

21 mai 2026

Durée : 3h

À des fins d'optimisation de la rédaction, ce corrigé a été produit avec l'aide d'une IA

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits.

Le barème est indicatif.

Questions isolées (8 points)

1. On considère une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les relations

$$|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3} |B_n - B_{n-1}|, \quad \forall n \geq 1.$$

Montrer que : $|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3^n} |B_1 - B_0|, \forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Solution. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3} |B_n - B_{n-1}|, \forall n \geq 1$. Montrons dans un premier temps que

$$|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3^n} |B_1 - B_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, nous procédons par récurrence sur n .

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $|B_1 - B_0| = \frac{1}{3^0} |B_1 - B_0|$, de sorte que la propriété est vraie.

Hérédité. Supposons qu'à un certain rang $n \geq 0$, $|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3^n} |B_1 - B_0|$. D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$$|B_{n+2} - B_{n+1}| \leq \frac{1}{3} |B_{n+1} - B_n|.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$|B_{n+2} - B_{n+1}| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n} |B_1 - B_0| = \frac{1}{3^{n+1}} |B_1 - B_0|.$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$. Le principe de récurrence permet alors de conclure que

$$|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3^n} |B_1 - B_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrons maintenant que la suite (B_n) est de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$. On écrit

$$B_p - B_q = \sum_{k=q}^{p-1} (B_{k+1} - B_k).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, il vient

$$|B_p - B_q| \leq \sum_{k=q}^{p-1} |B_{k+1} - B_k|.$$

D'après le résultat précédent,

$$|B_p - B_q| \leq |B_1 - B_0| \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{3^k} \leq |B_1 - B_0| \sum_{k=q}^{+\infty} \frac{1}{3^k}.$$

Or la série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ est convergente et

$$\sum_{k=q}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^q}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \frac{1}{3^q}.$$

On en déduit que

$$|B_p - B_q| \leq \frac{3}{2} |B_1 - B_0| \frac{1}{3^q}.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque $q \rightarrow +\infty$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, dès que $p, q \geq N$,

$$|B_p - B_q| < \varepsilon.$$

Par définition, la suite (B_n) est donc une suite de Cauchy.

Conclusion. La suite (B_n) est une suite de Cauchy.

2. À tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on associe la suite $u_n^\alpha := \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$, $n \geq 1$. Déterminer sa limite en fonction de α .

Solution. Comme les termes de la suite sont strictement positifs, il est naturel d'étudier leur logarithme. On pose

$$\ell_n := \ln(u_n^\alpha) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Nous distinguons plusieurs cas.

Premier cas : $\alpha > 1$. On a alors $\frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$, et l'équivalent classique $\ln(1+x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$) donne

$$\ell_n \sim n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = n^{1-\alpha}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Or $1 - \alpha < 0$, donc $n^{1-\alpha} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent, $\ell_n \rightarrow 0$, et, par continuité de l'exponentielle, $u_n \rightarrow e^0 = 1$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha = 1 \quad \text{si } \alpha > 1.}$$

Deuxième cas : $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\ell_n = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Comme $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, on obtient $\ell_n \rightarrow 1$. Par conséquent, $u_n^\alpha \rightarrow e$, $n \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha = e \quad \text{si } \alpha = 1.}$$

Troisième cas : $0 < \alpha < 1$. L'équivalent précédent donne encore $\ell_n \sim n^{1-\alpha}$, $n \rightarrow +\infty$. Or $1 - \alpha > 0$, donc $n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$. Ainsi, $\ell_n \rightarrow +\infty$, et $u_n^\alpha = e^{\ell_n} \rightarrow +\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha = +\infty \quad \text{si } 0 < \alpha < 1.}$$

Quatrième cas : $\alpha = 0$. On a simplement $u_n = (1 + 1)^n = 2^n$, d'où $u_n^\alpha \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$.

Cinquième cas : $\alpha < 0$. Alors $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$. Il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $1 + \frac{1}{n^\alpha} \geq 2$. On en déduit

$$u_n^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n \geq 2^n, \quad n \geq N.$$

Comme $2^n \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison entraîne $u_n^\alpha \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha = +\infty \quad \text{si } \alpha < 0.}$$

En conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha > 1, \\ e, & \text{si } \alpha = 1, \\ +\infty, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}}$$

3. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

- Est-ce que l'on peut en déduire que $(f(x))^3 \underset{0}{\sim} (\ln(x))^3$? (Justifier votre réponse)
- Est-ce que l'on peut en déduire que $\exp(f(x)) \underset{0}{\sim} x$? (Justifier votre réponse)

Solution. Vu en cours.

4. Donner un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}$

Solution. Équivalent lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Pour le premier terme, on factorise par x^2 :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Or, lorsque $u \rightarrow 0$, $\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u)$. En prenant $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, on obtient

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{2} + o(1).$$

De même,

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}.$$

Comme $(1 + u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} + o(u)$ ($u \rightarrow 0$), on en déduit

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = x \left(1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{1}{3} + o(1).$$

Par conséquent,

$$h(x) = \left(x + \frac{1}{2} + o(1)\right) - \left(x + \frac{1}{3} + o(1)\right) = \frac{1}{6} + o(1).$$

Ainsi,

$$\boxed{h(x) \sim \frac{1}{6} \quad (x \rightarrow +\infty).}$$

Équivalent lorsque $x \rightarrow 0$. La fonction h est continue au voisinage de 0 et

$$h(0) = \sqrt{1} - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0.$$

Il est donc naturel de rechercher un développement limité à l'ordre 1. On utilise les développements

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u), \quad (1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} + o(u),$$

lorsque $u \rightarrow 0$. Or $x^2 + x + 1 = 1 + (x + x^2)$, d'où

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1 + \frac{x + x^2}{2} + o(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

De même, $x^3 + x^2 + 1 = 1 + (x^2 + x^3)$, et par suite

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = 1 + \frac{x^2 + x^3}{3} + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

On obtient alors

$$h(x) = \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{x}{2} + o(x).$$

Par conséquent,

$$h(x) \sim \frac{x}{2} \quad (x \rightarrow 0).$$

Conclusion. Les équivalents recherchés sont

$$h(x) \sim \frac{1}{6} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty, \quad \text{et} \quad h(x) \sim \frac{x}{2} \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

5. Pour chacune des séries numériques suivantes, déterminer, en justifiant, si elle converge ou diverge :

$$S_1 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2 + \sqrt{n}}{n^3 + 1}, \quad S_2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 2}.$$

Solution. Étude de la série S_1 .

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a $2 + \sqrt{n} \sim \sqrt{n}$ et $n^3 + 1 \sim n^3$. Par conséquent,

$$\frac{2 + \sqrt{n}}{n^3 + 1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{5/2}}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{5/2}}$ est convergente puisque $\frac{5}{2} > 1$. Comme les termes de la série sont positifs, le critère de comparaison par équivalent permet de conclure que la série S_1 converge. Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2 + \sqrt{n}}{n^3 + 1} \quad \text{est convergente.}$$

Étude de la série S_2 . Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$. Alors $a_n > 0$, la suite (a_n) est décroissante à partir d'un certain rang, et $a_n \rightarrow 0$, ($n \rightarrow +\infty$). La série S_2 est donc une série alternée dont les coefficients décroissent vers 0. D'après le critère de Leibniz, on déduit :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 2} \quad \text{est convergente.}$$

Exercice 1 (5 points)

On veut déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite

$$C_n = \cos(\ln(n)), \quad n \geq 1.$$

On fixe un réel $\theta \geq 0$, et on considère l'application $\varphi_\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par la relation

$$\varphi_\theta(n) = [\exp(\theta + 2n\pi)],$$

où $[-] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la fonction partie entière : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est l'unique élément de \mathbb{Z} vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$.

1. Vérifier que $\varphi_\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
2. Montrer que la suite $\ln(\varphi_\theta(n)) - 2n\pi$ converge vers θ . En déduire la limite de la suite $\cos(\ln(\varphi_\theta(n)))$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(C_n)_{n \geq 1}$.

Solution.

1. L'application φ_θ est strictement croissante

La fonction $x \mapsto \exp(\theta + 2\pi x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus,

$$\exp(\theta + 2(n+1)\pi) - \exp(\theta + 2n\pi) = e^{\theta+2n\pi}(e^{2\pi} - 1).$$

Comme

$$e^{\theta+2n\pi} \geq 1 \quad \text{et} \quad e^{2\pi} - 1 > 1,$$

on obtient

$$\exp(\theta + 2(n+1)\pi) - \exp(\theta + 2n\pi) > 1.$$

Or, si deux réels $a < b$ vérifient $b - a > 1$, alors $[a] < [b]$. Par conséquent,

$$\varphi_\theta(n) < \varphi_\theta(n+1),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\varphi_\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

2. Étude de la suite $\ln(\varphi_\theta(n)) - 2n\pi$. Par définition de la partie entière,

$$\varphi_\theta(n) \leq e^{\theta+2n\pi} < \varphi_\theta(n) + 1.$$

En divisant par $e^{\theta+2n\pi}$, on obtient

$$1 - \frac{1}{e^{\theta+2n\pi}} < \frac{\varphi_\theta(n)}{e^{\theta+2n\pi}} \leq 1.$$

Comme $e^{\theta+2n\pi} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, le membre de gauche tend vers 1. Le théorème des gendarmes donne alors

$$\frac{\varphi_\theta(n)}{e^{\theta+2n\pi}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow +\infty.$$

En prenant le logarithme, $\ln\left(\frac{\varphi_\theta(n)}{e^{\theta+2n\pi}}\right) = \ln(\varphi_\theta(n)) - \theta - 2n\pi \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\ln(\varphi_\theta(n)) - 2n\pi \rightarrow \theta, n \rightarrow +\infty.}$$

Par continuité de la fonction cosinus, $\cos(\ln(\varphi_\theta(n)) - 2n\pi) \rightarrow \cos \theta, n \rightarrow +\infty$. Or la fonction cosinus est 2π -périodique, donc $\cos(\ln(\varphi_\theta(n)) - 2n\pi) = \cos(\ln(\varphi_\theta(n)))$. Ainsi,

$$\boxed{\cos(\ln(\varphi_\theta(n))) \rightarrow \cos \theta, \quad n \rightarrow +\infty.}$$

3. Ensemble des valeurs d'adhérence. Comme φ_θ est strictement croissante, la suite $(\varphi_\theta(n))_{n \geq 0}$ est une extraction de la suite des entiers. Par conséquent,

$$(C_{\varphi_\theta(n)}) = (\cos(\ln(\varphi_\theta(n)))) \longrightarrow \cos \theta, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, pour tout $\theta \geq 0$, le réel $\cos \theta$ est une valeur d'adhérence de la suite (C_n) . Réciproquement, pour tout n , $-1 \leq C_n \leq 1$, de sorte que toute valeur d'adhérence appartient nécessairement à l'intervalle $[-1, 1]$. Enfin,

$$\{\cos \theta; \theta \geq 0\} = [-1, 1].$$

On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (C_n) est $[-1, 1]$.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation

$$F(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}-3}{\sqrt{1+x^2}-1}, \quad x \neq 0.$$

1. Calculer le $DL_2(0)$ de la fonction F .
2. Exprimer les termes de la suite

$$u_n := \frac{\sqrt{9n^2+1}-3n}{\sqrt{n^2+1}-n}, \quad n \geq 0,$$

au moyen de la fonction F , puis montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{3}$.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, calculer la limite de la suite $n^\alpha(u_n - \frac{1}{3})$, $n \in \mathbb{N}$.

Solution. 1. Calcul du développement limité de F en 0. On utilise les développements limités usuels :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2), \quad (t \rightarrow 0).$$

En écrivant $\sqrt{9+x^2} = 3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$, on obtient

$$\sqrt{9+x^2} = 3 \left(1 + \frac{x^2}{18} - \frac{x^4}{648} + o(x^4) \right) = 3 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{216} + o(x^4).$$

Ainsi,

$$\sqrt{9+x^2}-3 = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{216} + o(x^4).$$

De même, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$, d'où

$$\sqrt{1+x^2}-1 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

On factorise alors par x^2 :

$$F(x) = \frac{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{216} + o(x^2)}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}.$$

Comme

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8}} = 2 \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} = 2 \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) + o(x^2),$$

on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{216} \right) \left(2 + \frac{x^2}{2} \right) + o(x^2) \\ &= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{108} \right) x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{27} x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{27} x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).}$$

2. Expression de la suite au moyen de F . On considère

$$u_n = \frac{\sqrt{9n^2 + 1} - 3n}{\sqrt{n^2 + 1} - n}, \quad n \geq 0.$$

En factorisant par n dans les deux racines,

$$\sqrt{9n^2 + 1} = n\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}, \quad \sqrt{n^2 + 1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}},$$

on obtient

$$u_n = \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} - 3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1} = F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$, le développement limité précédent donne

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{27} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En particulier,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}.}$$

3. Calcul de la limite de $n^\alpha \left(u_n - \frac{1}{3} \right)$. D'après la question précédente, on dispose du développement asymptotique $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{27} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par conséquent,

$$u_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et, en multipliant par n^α ,

$$n^\alpha \left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27} n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}).$$

Autrement dit,

$$n^\alpha \left(u_n - \frac{1}{3}\right) \sim \frac{2}{27} n^{\alpha-2}, n \rightarrow +\infty.$$

Il suffit alors d'étudier la limite de $n^{\alpha-2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui conduit aux trois situations suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha < 2, \\ \frac{2}{27}, & \text{si } \alpha = 2, \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 2. \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)

Soit a un nombre réel et $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur $]a, +\infty[$. On veut montrer que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.

On pose $M_0 := \sup_{x>a} |f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x>a} |f''(x)|$.

1. Soient $x > a$ et $h > 0$. En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[x, x+h]$, montrer que

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

2. On considère la fonction $\Phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(h) := \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$.

(a) (Question de cours) En appliquant le théorème de Taylor-Young à l'ordre 1, montrer que si Φ a un minimum local en un point $h_0 > 0$, alors $\Phi'(h_0) = 0$.

(b) Montrer que si $M_2 > 0$ alors Φ a un minimum, et le calculer.

3. Conclure.

Solution. 1. Une majoration de $|f'(x)|$. Soient $x > a$ et $h > 0$. En appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à l'ordre 2 sur l'intervalle $[x, x+h]$, il existe un réel $\xi \in (x, x+h)$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi).$$

On en déduit

$$hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2} f''(\xi).$$

En prenant les valeurs absolues,

$$h|f'(x)| \leq |f(x+h) - f(x)| + \frac{h^2}{2}|f''(\xi)|.$$

Or, $|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| \leq 2M_0$, et $|f''(\xi)| \leq M_2$. Ainsi,

$$h|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2.$$

En divisant par $h > 0$, on obtient

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

2. Étude de la fonction Φ . On considère

$$\Phi : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(h) = \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

(a) Condition nécessaire en un minimum. Soit $h_0 > 0$ un minimum local de Φ . Comme Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $(0, +\infty)$, on a le développement de Taylor-Young de $\Phi : \Phi(h) - \Phi(h_0) = \Phi'(h_0)(h - h_0) + o(h - h_0)$. Cette quantité doit être ≥ 0 pour h suffisamment proche de h_0 , car h_0 est un minimum local de Φ . Puisque $h - h_0$ change de signe selon que $h > h_0$ ou $h < h_0$, il s'ensuit que nécessairement $\Phi'(h_0) = 0$. Ceci a été vu en cours.

(b) Calcul du minimum On suppose désormais que $M_2 > 0$. La dérivée est

$$\Phi'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}.$$

L'équation $\Phi'(h) = 0$ équivaut à $\frac{M_2}{2} = \frac{2M_0}{h^2}$, c'est-à-dire $h^2 = \frac{4M_0}{M_2}$. Comme $h > 0$, il existe une unique solution h_0 de cette équation, qui est :

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$$

De plus,

$$\Phi''(h_0) = \frac{4M_0}{h_0^3} > 0,$$

si bien que h_0 est bien un point où Φ atteint un minimum local (c'est un résultat du cours). On vient de voir que c'est le seul, et de plus $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \Phi(h) = +\infty$. Donc $\Phi(h_0)$ est un minimum *global* de l'ensemble $\Phi((0, +\infty))$, et h_0 est le seul point où Φ atteint ce minimum. Calculons sa valeur :

$$\Phi(h_0) = \frac{2M_0}{2\sqrt{M_0/M_2}} + \frac{M_2}{2} 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$$

On simplifie :

$$\Phi(h_0) = \sqrt{M_0M_2} + \sqrt{M_0M_2} = 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Ainsi,

$$\min_{h>0} \Phi(h) = \Phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}.$$

3. Conclusion Pour tout $x > a$ et tout $h > 0$, on a montré que $|f'(x)| \leq \Phi(h)$. Supposons que $M_2 > 0$. On choisit alors $h = h_0$, point où Φ est minimale, déterminé dans la question 2. Il vient

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Cette majoration étant indépendante de x , on obtient

$$\boxed{\sup_{x>a} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}.}$$

En particulier, la dérivée f' est bornée sur $(a, +\infty)$.

Si $M_2 = 0$, alors par définition f'' est identiquement nulle sur $(a, +\infty)$ et donc (par primitives) f est une fonction affine, i.e. de la forme $f(x) = ax + b$, $x > a$. Puisque f est bornée, $a = 0$, et alors $f' = 0$. \square