



Examen
21 mai 2026
Durée : 3h

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits.

Le barème est indicatif.

Questions isolées (8 points)

1. On considère une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les relations

$$|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3} |B_n - B_{n-1}|, \quad \forall n \geq 1.$$

Montrer que : $|B_{n+1} - B_n| \leq \frac{1}{3^n} |B_1 - B_0|, \forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

2. À tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on associe la suite $u_n^\alpha := (1 + \frac{1}{n^\alpha})^n, n \geq 1$. Déterminer sa limite en fonction de α .

3. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.

— Est-ce que l'on peut en déduire que $(f(x))^3 \underset{0}{\sim} (\ln(x))^3$? (Justifier votre réponse)

— Est-ce que l'on peut en déduire que $\exp(f(x)) \underset{0}{\sim} x$? (Justifier votre réponse)

4. Donner un équivalent simple en $+\infty$ et en 0 de $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}$

5. Pour chacune des séries numériques suivantes, déterminer, en justifiant, si elle converge ou diverge :

$$S_1 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2 + \sqrt{n}}{n^3 + 1}, \quad S_2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 2}.$$

Exercice 1 (5 points)

On veut déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite

$$C_n = \cos(\ln(n)), \quad n \geq 1.$$

On fixe un réel $\theta \geq 0$, et on considère l'application $\varphi_\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par la relation

$$\varphi_\theta(n) = [\exp(\theta + 2n\pi)],$$

où $[-] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ désigne la fonction partie entière : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est l'unique élément de \mathbb{Z} vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$.

1. Vérifier que $\varphi_\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

2. Montrer que la suite $\ln(\varphi_\theta(n)) - 2n\pi$ converge vers θ . En déduire la limite de la suite $\cos(\ln(\varphi_\theta(n)))$.

3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(C_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation

$$F(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}-3}{\sqrt{1+x^2}-1}, \quad x \neq 0.$$

1. Calculer le $DL_2(0)$ de la fonction F .

2. Exprimer les termes de la suite

$$u_n := \frac{\sqrt{9n^2+1}-3n}{\sqrt{n^2+1}-n}, \quad n \geq 0,$$

au moyen de la fonction F , puis montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{3}$.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, calculer la limite de la suite $n^\alpha(u_n - \frac{1}{3})$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (5 points)

Soit a un nombre réel et $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur $]a, +\infty[$. On veut montrer que f' est bornée sur $]a, +\infty[$.

On pose $M_0 := \sup_{x>a} |f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x>a} |f''(x)|$.

1. Soient $x > a$ et $h > 0$. En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[x, x+h]$, montrer que

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

2. On considère la fonction $\Phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(h) := \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$.

(a) (Question de cours) En appliquant le théorème de Taylor-Young à l'ordre 1, montrer que si Φ a un minimum local en un point $h_0 > 0$, alors $\Phi'(h_0) = 0$.

(b) Montrer que si $M_2 > 0$ alors Φ a un minimum, et le calculer.

3. Conclure.