corrigé examen mai 2026

Ex 1

1- par définition l'erreur de consistance est définie par

$$\varepsilon(h) := y(t_0+h) - y(t_0) - h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y(t_0) + \frac{h}{2} f(t_0, y(t_0))\right)$$

Effectuons un développement de Taylor :

$$y(t_0+h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + O(h^3)$$

on sait que $y'(t) = f(t, y(t))$ donc en dérivant $/_{p} t$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(t, y(t))$$

Développons également $f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y(t_0) + \frac{h}{2} f(t_0, y(t_0))\right)$

$$f\left(t_0+\frac{h}{2}, y(t_0) + \frac{h}{2} f(t_0, y(t_0))\right) = f(t_0, y(t_0)) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + \frac{h}{2} f(t_0, y(t_0)) \frac{\partial f}{\partial y}(\ ) + O(h^2)$$

Ainsi $\varepsilon(h) = h f(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f\right) - h\left(f(t_0, y(t_0)) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{h}{2} f \frac{\partial f}{\partial y}(\ )\right) + O(h^3)$

il reste

$$\varepsilon(h) = O(h^3)$$

2- Soit $\phi : y \longmapsto f\left(t_n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n, y)\right)$

$$|\phi(y) - \phi(z)| = \left| f\left(t_n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n, y)\right) - f\left(t_n + \frac{h}{2}, z + \frac{h}{2} f(t_n, z)\right)\right|$$

utilisons le fait que f est lipschitz de rapport L :

$$|\phi(y) - \phi(z)| \leq L \left| y + \frac{h}{2} f(t_n, y) - z - \frac{h}{2} f(t_n, z)\right|$$

$$\leq L |y - z| + L \frac{h}{2} |f(t_n, y) - f(t_n, z)|$$

$$\leq L |y - z| + L^2 \frac{h}{2} |y - z| \leq L\left(1 + \frac{Lh}{2}\right) |y - z|$$

Donc ϕ est $L\left(1 + \frac{Lh}{2}\right)$ - lipschitz

3- le schéma du point milieu est un schéma à un pas de la forme $y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n; h)$ avec Φ lipschitz $/_{p} y$ d'après la question 2. C'est un schéma consistant dont l'erreur de consistance est $O(h^3)$.

D'après le théorème de convergence des schémas à un pas,
le schéma du point milieu est convergent et d'ordre $3-1=2$
ce qui signifie précisément :

$$\max_{0\leq t_n\leq T} |y(t_n)-y_n| = O(h^2)$$

Ex2 Considérons les polynômes associés au schéma de Nyström :

$$y_{n+3} = y_{n+1} + h\left(\frac{7}{3}f_{n+2} - \frac{2}{3}f_{n+1} + \frac{1}{3}f_n\right)$$

$$\rho(z) = z^3 - z = z(z-1)(z+1) \quad ; \quad \sigma(z) = \frac{7}{3}z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}$$

1. Les racines de ρ sont $0, 1, (-1)$ donc de module ≤ 1
De plus 1 et (-1) sont racines simples. La condition de stabilité est vérifiée

2. $\sigma(1) = 2$ $\qquad \rho(1) = 0 \qquad \rho'(1) = 2 = \sigma(1)$
la condition de consistance est vérifiée.

3- Estimons l'erreur de consistance.

$$\varepsilon(h) := y(t_0+h) - y(t_0-h) - h\left(\frac{7}{3}y'(t_0) - \frac{2}{3}y'(t_0-h) + \frac{1}{3}y'(t_0-2h)\right)$$

Effectuons des développements de Taylor

$$y(t_0+h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{h^2}{2}y''(t_0) + \frac{h^3}{6}y'''(t_0) + O(h^4)$$

$$y(t_0-h) = y(t_0) - hy'(t_0) + \frac{h^2}{2}y''(t_0) - \frac{h^3}{6}y'''(t_0) + O(h^4)$$

$$y'(t_0-h) = y'(t_0) - hy''(t_0) + \frac{h^2}{2}y'''(t_0) + O(h^3)$$

$$y'(t_0-2h) = y'(t_0) - 2hy''(t_0) + 2h^2y'''(t_0) + O(h^3)$$

$$\varepsilon(h) = \cancel{2h\,y'(t_0)} + \cancel{\frac{h^3}{3}y'''(t_0)} - h\,\cancel{\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)y'(t_0)} - h^2\cancel{\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)}y''(t_0)$$
$$+ h^3\cancel{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)}y'''(t_0) + O(h^4)$$

$$\varepsilon(h) = O(h^4)$$

4. D'après le théorème de Dahlquist, le schéma de Nyström est

stable et consistant donc il est convergent. Comme l'erreur de consistance est $O(h^4)$, c'est un schéma d'ordre 3.

EX 3 1. les courbes caractéristiques sont les solutions de

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X - 1 \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

2. Ce sont des équations différentielles linéaires du 1e ordre.

les solutions de l'équation homogène sont

$$X(t) = \lambda e^t \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

une solution particulière évidente est $X(t) \equiv 1$

Donc la solution générale est $X(t) = 1 + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}$

on veut $X(0) = x_0$ donc $x_0 = 1 + \lambda$

Ainsi $\underline{X(t) = 1 + (x_0 - 1)e^t}$

3. Soit $v(t) = u(X(t), t)$

$$\frac{dv}{dt} = u_t + u_x X'(t) = u_t + u_x (X(t) - 1)$$

$$= u_t(X(t), t) + (X(t) - 1) u_x(X(t), t)$$

$$= 0$$

donc $v(t) = \text{cont} = v(0) = u(x_0, 0) = f(x_0)$

Donc $u(1 + (x_0 - 1)e^t, t) = f(x_0)$

posons $x = 1 + (x_0 - 1)e^t \iff x_0 - 1 = e^{-t}(x - 1)$

$\iff x_0 = 1 + e^{-t}(x - 1)$

Donc $\boxed{u(x, t) = f(1 + e^{-t}(x-1))}$ est la solution de l'EDP.

On vérifie bien en particulier $u(x, 0) = f(x)$.

4. quand $t \to +\infty$ $1 + e^{-t}(x-1) \to 1$

donc $u(x, t) \to f(1)$ par continuité de f.

Ex 4

1- $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \mu \left(\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2} \right)$$

donc $$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\mu \delta t}{\delta x^2} \left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n \right)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{\mu \delta t}{\delta x^2} u_{j-1}^n + \left(1 - \frac{2\mu\delta t}{\delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\mu \delta t}{\delta x^2} u_{j+1}^n$$

$$= r\, u_{j-1}^n + (1-2r) u_j^n + r\, u_{j+1}^n$$

2- l'erreur de consistance du schéma est donné par

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) := u(x_j, t_n + \delta t) - r\,u(x_j - \delta x, t_n) - (1-2r) u(x_j, t_n) - r\,u(x_j + \delta x, t_n)$$

Effectuons un développement de Taylor à 2 variables.

$$u(x_j, t_n + \delta t) = u(x_j, t_n) + \delta t\, u_t(\;) + O(\delta t^2)$$

$$u(x_j - \delta x, t_n) = u(x_j, t_n) - \delta x\, u_x + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx} - \frac{\delta x^3}{6} u_{xxx} + O(\delta x^4)$$

$$u(x_j + \delta x, t_n) = u(x_j, t_n) + \delta x\, u_x + \frac{1}{2}\delta x^2 u_{xx} + \frac{1}{6}\delta x^3 u_{xxx} + O(\delta x^4)$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) = \delta t\, u_t(\;) - r\,\delta x^2 u_{xx} - 2r\, O(\delta x^4) + O(\delta t^2)$$

$$= \delta t \underbrace{(u_t - \mu u_{xx})}_{u \text{ solution de l'EDP}} + O(\delta t^2) - 2\mu\delta t\, O(\delta x^2)$$

$$\varepsilon(\delta t, \delta x) \overset{0}{=} O(\delta t^2) + O(\delta t\, \delta x^2)$$

3- si $r \leq 1/2$ u_j^{n+1} est combinaison barycentrique de $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$

donc $$\min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

$$\inf_k (u_k^n) \leq u_j^{n+1} \leq \sup_k (u_k^n)$$

Par récurrence immédiate on en déduit

$$\inf_k (u_k^0) \leq u_j^n \leq \sup_k (u_k^0)$$

4- Calculons $u_j^1 = r e^{ik(j-1)\delta x} + (1-2r) e^{ikj\delta x} + r e^{ik(j+1)\delta x}$

$$u_j^1 = e^{ikj\delta x}\left(r e^{-ik\delta x} + (1-2r) + r e^{ik\delta x}\right)$$

$$u_j^1 = u_j^0 \left((1-2r) + 2r\cos(k\delta x)\right)$$

$$u_j^1 = u_j^0 \left(1 - 2r(1-\cos(k\delta x))\right)$$

$$u_j^1 = u_j^0 \left(1 - 4r\sin^2(k\delta x)\right)$$

Posons $G(k) = 1 - 4r\sin^2(k\delta x)$

Par récurrence on montre que $u_j^n = u_j^0 \cdot (G(k))^n$

En effet la relation est vraie pour $n = 0$ et l'hérédité se démontre comme le cas $n=1$.

5- $|G(k)| \leq 1 \iff -1 \leq G(k) \leq 1$

$$\iff 4r\sin^2(k\delta x) \leq 2$$

$$\iff r\sin^2(k\delta x) \leq 1/2$$

Si on veut que cela soit vrai $\forall k$, il faut et il suffit que $\boxed{r \leq 1/2}$