



Session : examen session 1

Date : 12/05/2026

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Parcours : MG, CUPGE

UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)

Durée de l'épreuve : 2h

Documents autorisés : néant

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

On considère le schéma suivant (dit du point-milieu) :

$$y_{n+1} = y_n + h f \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L , indépendant de t .

1. (2pts) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma quand $h \rightarrow 0$.
2. (1pt) Montrer que, pour t_n et h fixés, l'application $y \mapsto f \left(t_n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n, y) \right)$ est Lipschitzienne.
3. (1pt) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$ quand $h \rightarrow 0$. Quel est l'ordre du schéma ? Justifiez vos réponses.

Exercice 2 (5 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ où la fonction f est suffisamment régulière et Lipschitzienne par rapport à la variable y . On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On note $f_k = f(t_k, y_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le schéma de Nyström est donné par

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \left(\frac{7}{3} f_n - \frac{2}{3} f_{n-1} + \frac{1}{3} f_{n-2} \right).$$

C'est un schéma multipas qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n, y_{n-1} et y_{n-2} .

1. (1pt) Montrer que le schéma est stable.
2. (1pt) Montrer que le schéma est consistant.
3. (2pts) Montrer que l'erreur de consistance est $\mathcal{O}(h^4)$.
4. (1pt) Est-ce que le schéma est convergent ? Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez vos réponses.

T.S.V.P.

Exercice 3. (5 pts) On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + (x - 1)u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2)$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

1. (1pt) Rappeler la définition des courbes caractéristiques de l'équation (2).
2. (1pt) Déterminer les courbes caractéristiques de l'équation (2).
3. (2pts) En déduire la solution $u(x, t)$ de l'EDP (2).
4. (1pt) Pour x fixé, quelle est la limite de $u(x, t)$ quand $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 4. (6 pts) Soit $\mu > 0$. On considère l'EDP de diffusion

$$u_t - \mu u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (3)$$

Introduisons un pas de temps δt et aussi un pas d'espace δx . Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$. Ainsi les (x_j, t_n) définissent une grille de points ou un *maillage* dans le plan (x, t) . On note u_j^n la *valeur approchée* de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma.

On considère le schéma explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \mu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2}.$$

1. (1pt) Montrer que le schéma peut s'écrire ainsi :

$$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1 - 2r) u_j^n + r u_{j+1}^n.$$

où on a noté

$$r = \frac{\mu \delta t}{\delta x^2}.$$

2. (2 pts) Montrer que l'*erreur de consistance* du schéma est $\mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta t \delta x^2)$.
3. (1 pt) Montrer que si $r \leq \frac{1}{2}$ alors le schéma vérifie le principe du maximum discret : quelle que soit la donnée initiale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \inf_j u_j^0 \leq u_j^n \leq \sup_j u_j^0.$$

4. (1 pt) On choisit la condition initiale $f(x) = \exp(ikx)$, où k est un nombre réel. Ainsi $u_j^0 = \exp(ikj\delta x)$. Calculer le *facteur d'amplification* $G(k)$ tel que $u_j^n = G(k)^n u_j^0$.
 5. (1 pt) Donner une condition nécessaire et suffisante sur r pour que $|G(k)| \leq 1, \quad \forall k$.
-