



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES



HA8201H - Maths PEIP S2

Examen - Session 1 du 04/05/2026

Correction

Exercice 1 (Cours - TAF).

a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

On considère maintenant la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

b) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.

d) Montrer que, pour tous réels x, y tels que $-1 < x < y$, il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{\ln(1 + y) - \ln(1 + x)}{y - x} = \frac{1}{1 + c}.$$

e) En déduire que pour tout $x > -1$,

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

(Indication : on pourra distinguer les cas $x > 0$, $-1 < x < 0$ et $x = 0$.)

Correction.

a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

b) La fonction logarithme népérien est définie sur $]0, +\infty[$. Ainsi

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x > 0\} =]-1, +\infty[.$$

c) La fonction f est la composée

$$f(x) = \ln(1+x),$$

où $x \mapsto 1+x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Donc f est dérivable sur $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \in]-1, +\infty[.$$

d) Soient x, y tels que $-1 < x < y$. Comme la fonction f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, on sait d'après le TAF, qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = \frac{1}{1+c}.$$

e) Si $x > 0$, on sait par d) en appliquant le TAF entre 0 et x qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1+c}.$$

De plus,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Comme $0 < c < x$, on obtient $1 < 1+c < 1+x$ et donc

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1.$$

Il suit que

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Comme $x > 0$, on obtient

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Si $-1 < x < 0$, on sait par d) en appliquant le TAF entre x et 0 qu'il existe $c \in]x, 0[$ tel que

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c) = \frac{1}{1+c}.$$

De plus,

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{\ln(1) - \ln(1+x)}{-x} = \frac{-\ln(1+x)}{-x} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Comme $x < c < 0$, on obtient $1+x < 1+c < 1$ et donc

$$1 < \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}.$$

Il suit que

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}.$$

Comme $x < 0$, on obtient

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Si $x = 0$, on a $\ln(1) = 0$ et l'égalité est vérifiée

$$\frac{x}{1+x} = \ln(1+x) = x = 0.$$

Exercice 2 (Espaces vectoriels et dimension).

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z\}.$$

- a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- b) Déterminer une base de F et sa dimension.
- c) Déterminer une base de G et sa dimension.
- d) Déterminer $F \cap G$, puis donner une base et sa dimension.
- e) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Correction.

- a) Les ensembles F et G sont définis par des équations linéaires homogènes. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- b) Comme

$$x + y + z = 0 \iff z = -x - y,$$

on obtient

$$F = \{(x, y, -x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).$$

Les deux vecteurs sont linéairement indépendants et forment donc une base de F . On obtient alors

$$\dim F = 2.$$

- c) Comme

$$x = 2z,$$

on obtient

$$G = \{(2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 0), (2, 0, 1)).$$

Les deux vecteurs sont linéairement indépendants et forment donc une base de G . On obtient alors

$$\dim G = 2.$$

- d) On cherche les vecteurs vérifiant

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 2z \end{cases}$$

En remplaçant x par $2z$, on obtient

$$2z + y + z = 0 \implies y = -3z.$$

Donc

$$F \cap G = \{(2z, -3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, -3, 1)),$$

et

$$\dim(F \cap G) = 1.$$

e) On utilise la formule

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Donc

$$F + G = \mathbb{R}^3.$$

Cependant, $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc la somme n'est pas directe et les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires.

Exercice 3 (Application linéaire).

On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

- a) Vérifier que f est une application linéaire.
- b) Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
- c) Déterminer le noyau de f , puis donner une base de $\ker(f)$ et sa dimension.
- d) Déterminer l'image de f , puis sa dimension.
- e) L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.

Correction.

a) Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Comme

$$\begin{aligned} f((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) &= f((x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)) \\ &= ((x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2), (y_1 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2)) \\ &= ((x_1 + y_1) + \lambda(x_2 + y_2), (y_1 - z_1) + \lambda(y_2 - z_2)) \\ &= (x_1 + y_1, y_1 - z_1) + \lambda(x_2 + y_2, y_2 - z_2) \\ &= f((x_1, y_1, z_1)) + \lambda f((x_2, y_2, z_2)), \end{aligned}$$

on obtient que f est une application linéaire.

b) La matrice de f est donnée par

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Comme

$$f((x, y, z)) = (0, 0) \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = -y \text{ et } z = y.$$

Donc

$$\ker(f) = \{(-y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 1))$$

et

$$\dim \ker(f) = 1.$$

d) L'image de f est engendré par les vecteurs colonnes de sa matrice. Ainsi

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0), (1, 1), (0, -1)).$$

Comme $(1, 1) = (1, 0) - (0, -1)$, on a

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0), (1, 1), (0, -1)) = \text{Vect}((1, 0), (0, -1)) = \text{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2.$$

Ainsi

$$\dim \text{Im}(f) = 2.$$

e) Comme $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on sait que f n'est pas injective. De plus, comme $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, on sait que f est surjective.

Exercice 4 (Intégrales et primitives).

Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

a) $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$

b) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$

(Indication : on pourra effectuer le changement de variable $u = \sin(x)$.)

d) $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$

(Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.)

e) (Bonus - plus difficile)

$$\int_0^1 x \ln(1 + x) dx$$

(Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.)

Correction.

a) On effectue une IPP avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. Alors $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos(x)$ et donc

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(s) dx.$$

Comme

$$[-x \cos(x)]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} \cos(\pi/2) + 0 \cdot \cos(0) = 0,$$

on obtient

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos(s) dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1 - 0 = 1.$$

b) On effectue le changement de variable $u = x^2 + 1$. Alors $du = 2x dx$ et

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(|u|) + c = \ln(\sqrt{|u|}) + c = \ln(\sqrt{|x^2 + 1|}) + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. Comme $x^2 + 1 > 0$, on simplifie

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln(\sqrt{x^2 + 1}) + c.$$

c) On effectue le changement de variable $u = \sin(x)$. Alors $du = \cos(x) dx$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1 + u} = [\ln(|1 + u|)]_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}/2) - \ln(1) = \ln(1 + \sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

d) On effectue une IPP avec $u(x) = \ln(1 + x^2)$ et $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = 2x/(1 + x^2)$, $v(x) = x$ et donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx &= [x \ln(1 + x^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx \\ &= \ln(2) - 2[x - \arctan(x)]_0^1 = \ln(2) - 2(1 - \arctan(1) + \arctan(0)). \end{aligned}$$

Comme $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(0) = 0$, on obtient

$$\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

e) On effectue une IPP avec $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v'(x) = x$. Alors $u'(x) = 1/(1 + x)$, $v(x) = x^2/2$ et donc

$$\int_0^1 x \ln(1 + x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(1 + x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x} dx.$$

On a

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln(1 + x) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

De plus, comme $x^2 = (x - 1)(1 + x) + 1$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1 + x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(|1 + x|) \right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

Il suit que

$$\int_0^1 x \ln(1 + x) dx = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$