



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES



HA8201H - Maths PEIP S2

Examen - Session 1 du 04/05/2026

Durée : 2 heures

Documents, calculatrices et objets connectés interdits

Les différents exercices de ce contrôle sont entièrement indépendants. Toute réponse doit être justifiée. La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 (Cours - TAF).

a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.

On considère maintenant la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

b) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.

d) Montrer que, pour tous réels x, y tels que $-1 < x < y$, il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{\ln(1 + y) - \ln(1 + x)}{y - x} = \frac{1}{1 + c}.$$

e) En déduire que pour tout $x > -1$,

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

(Indication : on pourra distinguer les cas $x > 0$, $-1 < x < 0$ et $x = 0$.)

Exercice 2 (Espaces vectoriels et dimension).

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2z\}.$$

a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

- b) Déterminer une base de F et sa dimension.
- c) Déterminer une base de G et sa dimension.
- d) Déterminer $F \cap G$, puis donner une base et sa dimension.
- e) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier.

Exercice 3 (Application linéaire).

On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

- a) Vérifier que f est une application linéaire.
- b) Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
- c) Déterminer le noyau de f , puis donner une base de $\ker(f)$ et sa dimension.
- d) Déterminer l'image de f , puis sa dimension.
- e) L'application f est-elle injective? surjective? Justifier.

Exercice 4 (Intégrales et primitives).

Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

a) $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$

b) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$

(Indication : on pourra effectuer le changement de variable $u = \sin(x)$.)

d) $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx$

(Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.)

- e) (Bonus - plus difficile)

$$\int_0^1 x \ln(1 + x) dx$$

(Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.)