



HA8201H - Maths PEIP S2

Devoir Encadré n°3 du 17/04/2026 - Correction

Exercice 1 (TAF).

a) Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - \sqrt[3]{x^2} \end{aligned}$$

Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à f ?

b) Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km/h. Quand il en sort, deux heures plus tard, à 305 km de son point d'entrée, les gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait jamais été matériellement contrôlée. Les gendarmes ont-ils raison ?

Correction.

a) La fonction $x \mapsto x^2$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynomiale. De plus, La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R}^* . Enfin, la fonction $x \mapsto 1 - x$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynomiale. On en déduit que la fonction f est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$. Il reste à étudier sa dérivabilité en 0. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = -\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = -x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x} = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} = 0^+$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty.$$

On conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en 0. C'est pourquoi l'on ne peut pas appliquer le TAF à f .

b) Soit $x(t)$ la position de la voiture (mesurée en kilomètres) au temps t (mesuré en heures). On a $x(0) = 0$ et $x(2) = 305$. Si la position est une fonction dérivable du temps, alors le TAF permet de conclure qu'il existe un instant τ avec $0 < \tau < 2$ pour lequel

$$x'(\tau) = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = 152,5.$$

En d'autres termes, la voiture a eu, à un instant donné, une vitesse de 152,5 km/h.

Exercice 2 (Sommes de Riemann et intégrales).

On s'intéresse au calcul de limites de sommes à partir d'intégrales. Considérons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. On note S_n la somme suivante

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

appelée somme de Riemann. Elle est associée à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

a) Représenter la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et la somme S_n .

Supposons $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On note $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. On note E_n l'erreur entre l'intégrale de f et la somme S_n , c'est-à-dire,

$$E_n := \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \right|.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$ et donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

b) Montrer que

$$E_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(x) - f(a+kh)) dx \right|.$$

c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\left| \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(x) - f(a+kh)) dx \right| \leq M \frac{h^2}{2}.$$

d) En déduire que

$$E_n \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M$$

et conclure.

e) Applications : calculer les limites des sommes suivantes

$$\text{i) } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad \text{ii) } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

Correction.

a) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k)$. S_n correspond à la somme des aires des rectangles de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur $f(a_k)$.

- b) On utilise la relation de Chasles pour écrire l'intégrale sur $[a, b]$ comme une somme d'intégrales sur les sous-intervalles. Il faut ensuite utiliser que la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est inférieure à l'intégrale de la valeur absolue de la fonction en question. On obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \Sigma(f) \right| &= \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt. \end{aligned}$$

- c) Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur $[a_k, t]$:

$$f(t) - f(a_k) = (t - a_k) f'(\eta_k), \quad \eta_k \in]a_k, t[.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(\eta_k)(t - a_k)| dt &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant que $\sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \leq M$.

- d) On a

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \Sigma(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{h^2}{2}.$$

En utilisant que $h = (b - a)/n$, on obtient l'inégalité voulue. On observe que lorsque n tend vers l'infini (ou h tend vers 0), E_n tend vers 0, ce qui signifie que S_n tend vers l'intégrale de la fonction f .

- e) i) Ici $a = 0$, $b = 1$. On a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avec $f(x) = x$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x dx = 1/2$.

- ii) On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)}.$$

On applique la formule avec $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 1/(1+x)$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln(2).$$

Exercice 3 (Base de fonctions affines par morceaux).

Soient $p_0(x) = 1 - x$ et $p_1(x) = x$ définies sur $[0, 1]$.

a) Montrer que (p_0, p_1) forme une base des fonctions affines définies sur $[0, 1]$.

On considère maintenant une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ constituée des $N+2$ points $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$ avec $h = \frac{1}{N+1}$. Soient $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ la famille constituée des N fonctions définies par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

b) Représenter les graphes des fonctions φ_1 , φ_N et d'une fonction φ_i , pour $i = 2, \dots, N-1$. On pourra d'abord calculer $\varphi_i(x_{i-1})$, $\varphi_i(x_i)$ et $\varphi_i(x_{i+1})$.

c) Montrer que $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ est une famille libre.

On considère l'ensemble

$$H = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues} \mid f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ affine, } \forall i \in \{0, \dots, N\}\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

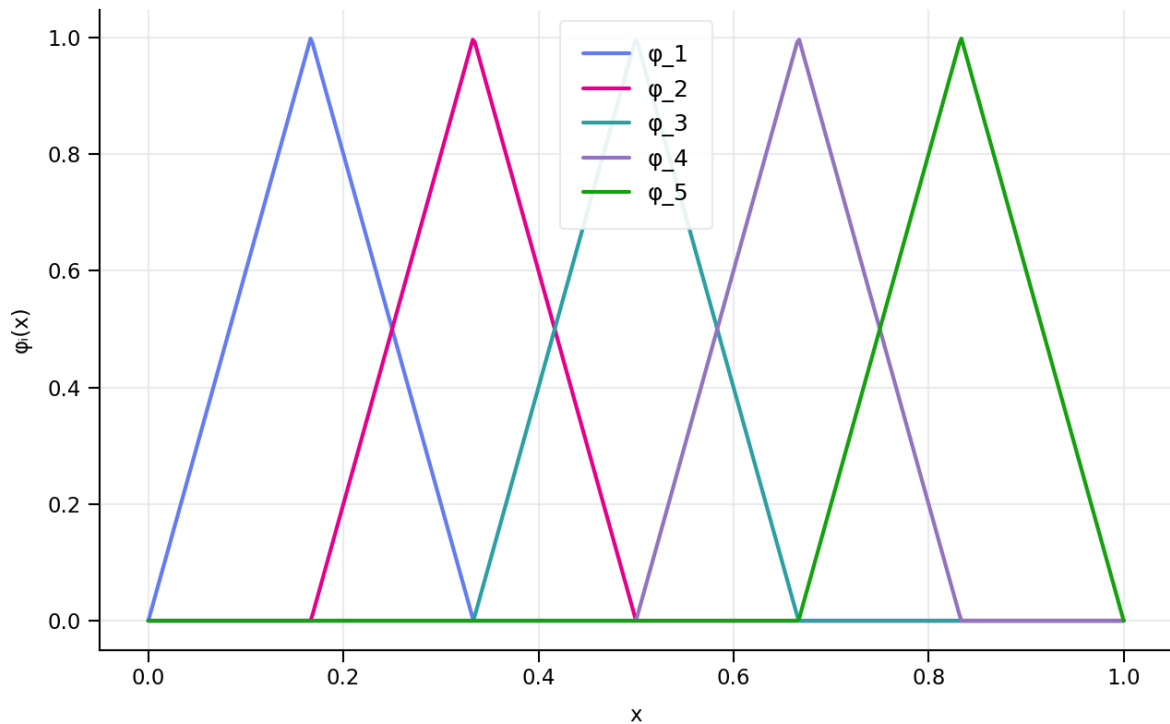
d) Montrer que $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ est une base de H . Déterminer la dimension de H .

Correction.

a) Soit f une fonction polynomiale de degré 1. Elle s'écrit donc $f(x) = ax + b$ avec a, b deux réels. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré 1 est donc de dimension 2. La famille (p_0, p_1) contient bien deux éléments. On observe que la famille est libre. En effet supposons $\alpha p_0(x) + \beta p_1(x) = 0$ pour tout x réel. Pour $x = 0$, on a $\alpha p_0(0) + \beta p_1(0) = 0$ implique $\alpha = 0$. En évaluant en $x = 1$, on trouve $\beta = 0$. La famille est donc libre. (p_0, p_1) forme donc une base des fonctions polynomiales de degré 1 définies sur $[0, 1]$.

b) On obtient les fonctions suivantes pour $N = 4$:

Fonctions chapeau φ_i



c) Soient $\alpha_i, i = 1, \dots, N$, des réels. On considère la combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) = 0.$$

Montrons que $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, N$. Pour cela, on observe que $\varphi_i(x_i) = 1$ et $\varphi_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$. On évalue alors la combinaison linéaire en x_j . On obtient que $\alpha_j = 0$. En faisant de même pour chaque point $x_j, i = 1, \dots, N$, on en déduit que tous les α_i sont nuls. La famille est donc libre.

d) Les φ_i sont des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et 1 et affines par morceaux. Ce sont donc des éléments de l'ensemble considéré, noté H . On va montrer que $(\varphi_i)_i$ forme une famille génératrice de H . Soit $v \in H$. On pose

$$w(x) = \sum_{i=1}^N v(x_i) \varphi_i(x).$$

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction w coïncide avec la fonction v aux points x_i et x_{i+1} et donc sur $[0, 1]$ tout entier. Ainsi toute fonction de H s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_i, i = 0, \dots, N$. La famille est donc génératrice. C'est donc une base de H . Comme elle compte N éléments,

$$\dim(H) = N.$$