



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER



FACULTÉ DES SCIENCES

HA8201H - Maths PEIP S2

Devoir Encadré n°3 du 17/04/2026

Exercice 1 (TAF).

a) Soit f la fonction définie par

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à f ?

b) Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km/h. Quand il en sort, deux heures plus tard, à 305 km de son point d'entrée, les gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait jamais été matériellement contrôlée. Les gendarmes ont-ils raison ?

Exercice 2 (Sommes de Riemann et intégrales).

On s'intéresse au calcul de limites de sommes à partir d'intégrales. Considérons $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable. On note S_n la somme suivante

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

appelée somme de Riemann. Elle est associée à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

a) Représenter la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et la somme S_n .

Supposons $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On note $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. On note E_n l'erreur entre l'intégrale de f et la somme S_n , c'est-à-dire,

$$E_n := \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \right|.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$ et donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

b) Montrer que

$$E_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(x) - f(a+kh)) dx \right|.$$

c) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\left| \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(x) - f(a+kh)) dx \right| \leq M \frac{h^2}{2}.$$

d) En déduire que

$$E_n \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M$$

et conclure.

e) Applications : calculer les limites des sommes suivantes

$$\text{i) } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \quad \text{et} \quad \text{ii) } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 3 (Base de fonctions affines par morceaux).

Soient $p_0(x) = 1 - x$ et $p_1(x) = x$ définies sur $[0, 1]$.

a) Montrer que (p_0, p_1) forme une base des fonctions affines définies sur $[0, 1]$.

On considère maintenant une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ constituée des $N+2$ points $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$ avec $h = \frac{1}{N+1}$. Soient $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ la famille constituée des N fonctions définies par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

b) Représenter les graphes des fonctions φ_1 , φ_N et d'une fonction φ_i , pour $i = 2, \dots, N-1$. On pourra d'abord calculer $\varphi_i(x_{i-1})$, $\varphi_i(x_i)$ et $\varphi_i(x_{i+1})$.

c) Montrer que $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ est une famille libre.

On considère l'ensemble

$$H = \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues} \mid f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ affine, } \forall i \in \{0, \dots, N\} \}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

c) Montrer que $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ est une base de H . Déterminer la dimension de H .