



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER



FACULTÉ DES SCIENCES

HA8201H - Maths PEIP S2

Contrôle Continu n°2 du 15/04/2026

Correction

Exercice 1 (Cours). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathbb{R} .

- a) Rappeler la définition de la dérivabilité de f en $a \in \mathbb{R}$.
b) En utilisant la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0, déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

On considère maintenant la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0, \\ ax + \cos(x) - 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- c) Trouver la valeur de $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle f est dérivable sur \mathbb{R} .

Correction. a) La fonction f est dite dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe.

- b) La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est l'opposée du sinus. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = -\sin(0) = 0.$$

De même, la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction cosinus. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(0) = 1.$$

c) La fonction $x \mapsto \sin(x)$ étant dérivable sur \mathbb{R} , on en déduit que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$. Peu importe la valeur de a , la fonction $x \mapsto ax - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} (fonction polynomiale). De même, la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} . Donc la fonction $x \mapsto ax + \cos(x) - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} . On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Il reste à étudier la dérivabilité en 0.

Pour $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{ax + \cos(x) - 1 - \sin(0)}{x} = \frac{ax + \cos(x) - 1}{x} = a + \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a + \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x} = a.$$

La limite en 0 existe si et seulement si les limites à gauche et à droite coïncident. On en conclut que f est dérivable en 0 si et seulement si $a = 1$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $\ker(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur u qui l'engendre.
- Soient $v = (1, 2, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer les images $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et donner leurs coefficients dans la base \mathcal{B} .
- En déduire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{2n+1} = f$.

Correction. a) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 4z \\ x + 3y - 5z \\ x + 2y - 4z \end{pmatrix}.$$

Donc $(x, y, z) \in \ker(f)$ si et seulement si (x, y, z) est solution du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système associé est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par échelonner la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

Il y a 2 variable principales et 1 variable libre, on sait que $\ker(f)$ est de dimension 1. On continue en réduisant la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

On obtient

$$\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(2, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u),$$

où $u = (2, 1, 1)$.

b) On calcule le déterminant de la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$$

en retranchant la troisième ligne à la première puis en développant suivant la première ligne. Comme ce déterminant est non nul, on en déduit que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

c) En utilisant la matrice de f dans la base canonique, on calcule $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et l'on détermine leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0.u + 0.v + 0.w,$$

car $u \in \ker(f)$.

$$f(v) = A.v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v = 0.u + 1.v + 0.w$$

$$f(w) = A.w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -w = 0.u + 0.v - 1.w$$

Les coordonnées respectives de $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base (u, v, w) sont donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d) La matrice de f dans cette base est donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) La matrice de f^{2n+1} dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est B^{2n+1} . Comme la matrice B est diagonale, on a

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Comme f^{2n+1} et f ont la même matrice dans cette base, on obtient que $f^{2n+1} = f$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .
- En déduire que les valeurs propres de A sont -1 , 1 et 2 .
- Justifier que la matrice A est diagonalisable.
- Pour chacune de ces trois valeurs propres λ , déterminer l'espace propre

$$\ker(A - \lambda I_3),$$

où I_3 est la matrice identité de taille 3.

e) Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Correction. a) On calcule le polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda^2 & \lambda - 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\lambda^2 & \lambda - 2 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

en ajoutant λ fois la seconde ligne à la première puis en développant suivant la première colonne. Il suit que

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2(2 - \lambda) + (\lambda - 2) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

- b) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$. Comme $\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$, on en déduit que les valeurs propres de A sont $-1, 1$ et 2 .
- c) La matrice A étant de taille 3×3 et admettant trois valeurs propres distinctes, on sait que la matrice A est diagonalisable.
- d) Pour $\lambda = -1$:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc $(x, y, z) \in \ker(A + I_3)$ si et seulement si (x, y, z) est solution du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système associé est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par échelonner la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

Il y a 2 variables principales et 1 variable libre, on sait que $\ker(A + I_3)$ est de dimension 1. La matrice est déjà réduite. Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases}$$

On obtient

$$\ker(A + I_3) = \{(2z, -3z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(2, -3, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u),$$

où $u = (2, -3, 1)$.

Pour $\lambda = 1$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $(x, y, z) \in \ker(A - I_3)$ si et seulement si (x, y, z) est solution du système linéaire homogène

$$\begin{cases} -x - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système associé est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par échelonner la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{array}$$

Il y a 2 variable principales et 1 variable libre, on sait que $\ker(A - I_3)$ est de dimension 1. On réduit la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -L_1 \\ -L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$$

On obtient

$$\ker(A - I_3) = \{(-2z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(v),$$

où $v = (-2, -1, 1)$.

Pour $\lambda = 2$:

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(x, y, z) \in \ker(A - I_3)$ si et seulement si (x, y, z) est solution du système linéaire homogène

$$\begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système associé est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par échelonner la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{array}$$

Il y a 2 variables principales et 1 variable libre, on sait que $\ker(A - 2I_3)$ est de dimension 1. On réduit la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}L_1 \\ -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$\ker(A - 2I_3) = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 0, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(w),$$

où $w = (-1, 0, 1)$.

e) La famille (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 car son déterminant est non nul :

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0,$$

en ajoutant la troisième ligne à la première puis en développant suivant la troisième colonne. On considère alors la matrice P de passage de la base (u, v, w) à la base canonique

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que la matrice P est inversible et que la matrice $D = P^{-1}AP$ vérifie alors

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$