



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER



FACULTÉ DES SCIENCES

HA8201H - Maths PEIP S2

Contrôle Continu n°2 du 15/04/2026

Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et objets connectés interdits

Les différents exercices de ce contrôle sont entièrement indépendants. Toute réponse doit être justifiée. La qualité et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 (Cours). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur \mathbb{R} .

- Rappeler la définition de la dérivabilité de f en $a \in \mathbb{R}$.
- En utilisant la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en 0, déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

On considère maintenant la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0, \\ ax + \cos(x) - 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Trouver la valeur de $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle f est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $\ker(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur u qui l'engendre.
- Soient $v = (1, 2, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer les images $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et donner leurs coefficients dans la base \mathcal{B} .
- En déduire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{2n+1} = f$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .
- b) En déduire que les valeurs propres de A sont -1 , 1 et 2 .
- c) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
- d) Pour chacune de ces trois valeurs propres λ , déterminer l'espace propre

$$\ker(A - \lambda I_3),$$

où I_3 est la matrice identité de taille 3.

- e) Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$D = P^{-1}AP.$$