

Résumé-semainier du cours

Module HAX201X

Les polycopiés du cours, disponibles sur Moodle, sont notés ci-dessous :

- [C1] = *Analyse 2*, par Jérémie Brioussel, 2022
- [C2] = *Développements Limités*, par Paul-Emile Paradan, 2022–2023
- [C3] = *Introduction aux séries numériques*, par Paul-Emile Paradan, 2022–2023

Les **démonstrations** à connaître, qui sont toutes faites en séance de CM, sont indiquées par “(*)”. Tous les énoncés de résultats, toutes les définitions, et tous les exemples sont à connaître.

SEMAINE 1

I. Rappels du premier semestre [C1, §1.1-1.4]

– Vocabulaire

- (1) suites majorées, minorées, bornées, périodiques, croissantes et décroissantes
- (2) utilisation de la terminologie “ à partir d’un certain rang ”

– Limites de suites

- (1) suites convergentes et divergentes
- (2) (*) **Lemme** : *Les suites convergentes sont bornées.*
Réciproque fautive (exemples : $u_n = (-1)^n, \dots$)
- (3) suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$
- (4) règle des croissances comparées :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Avec le changement de variable $x := -\ln(y)$, $y > 0$, cela donne $\lim_{y \rightarrow 0^+} y^\alpha |\ln(y)|^\beta = 0$ si $\alpha > 0$, et $+\infty$ si $\alpha < 0$.

\implies Exemples de limites classiques :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{(q')^{n^2}} = 0 \quad \forall \alpha > 0, \forall q, q' > 1.$$

- (5) Etude de quelques cas indéterminés ; exemples :

$$u_n = ne^{2n} - n^3 e^n - n^7, \quad v_n = \frac{n^3 - \cos(n) + 2n}{n^2 \ln(n) + n}.$$

– limites et fonctions

- (1) Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$.
- (2) Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = L$.
- (3) (*) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et (u_n) une suite de I convergente vers $L \in I$. Alors $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.
- (4) Exemples : $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, $v_n = n \sin(1/n)$.

– suites monotones

- (1) (*) **Théorème** de convergence des suites monotones :

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée), alors elle converge. Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et n'est pas majorée (resp. minorée), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Lorsque (u_n) est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), sa limite est le nombre réel $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).

- (2) Exemples plus difficiles : la suite de terme général $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ diverge, et celle de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$ converge. (Méthode par encadrement intégral.)

– suites adjacentes

- (1) (*) **Théorème** : Si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
- (2) Exemple : $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$: (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes (cf. poly [C1] pour les détails).

SEMAINE 2

– Relations de comparaison o , O et \sim

- (1) Définitions
- (2) Exemples : $q^n = o(1)$ si $|q| < 1$, $\sqrt{n^2+1} + n \cos(n) = O(n)$, $n^\alpha = o(q^n)$ pour tous $\alpha > 0, q > 1$, $(q')^n = o(q^n)$ pour tous $q > q' > 0$.
- (3) Exemples : $\frac{2 \sin(n^2)}{n} = O(\frac{1}{n})$, $\frac{n^2 + \cos(n)}{n \ln(n) + 1} \sim \frac{n}{\ln(n)}$, $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, $\sum_{k=1}^n 1/k \sim \ln(n)$ (via l'encadrement intégral de $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ vu en semaine 1)

II. Suites récurrentes $u_{n+1} = F(u_n)$ [C1, §1.6]

- (1) Définition, représentation graphique
- (2) (*) **Proposition** : Soit $F : I \rightarrow I$, et $u_0 \in I$. On a :
- si F est une fonction croissante alors (u_n) est monotone : si $u_1 \leq u_0$, elle est décroissante, et si $u_1 \geq u_0$, elle est croissante ;
 - si $F(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, alors (u_n) est croissante ; si $F(x) \leq x$ pour tout $x \in I$, alors (u_n) est décroissante ;
 - si (u_n) converge et F est continue, alors la limite L de (u_n) est un point fixe de F , c'est-à-dire qu'il vérifie $F(L) = L$.
- (3) Méthode générale pour étudier une suite récurrente (u_n) .
Deux exemples détaillés : étude des suites récurrentes définies par $F(x) = \sqrt{x+1}$, et $F(x) = -x^2 + 2x$.
Voir dans [C1, pp 22-24] le cas de $F(x) = \cos(x)$.
- (4) Définition d'une application contractante sur un intervalle de \mathbb{R} .
Rappel de l'inégalité des accroissements finis.
- (5) Énoncé du **théorème du point fixe** (preuve en semaine 5, et dans [C1, §1.9]) :

Soient I un intervalle fermé de \mathbb{R} et $F : I \rightarrow I$ une application contractante. Alors F possède un unique point fixe L . De plus, la suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $u_0 \in I$, converge vers L .

(On dit qu'un intervalle I de \mathbb{R} est fermé si $I = \mathbb{R}$ ou I est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, ou $]-\infty, a]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).

- (6) Applications/exemples :
- approximation de $\sqrt{2}$ par la suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $F(x) = x/2 + 1/x$ est contractante sur $I = [1, \infty[$.

- approximation de la racine α du polynôme $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ dans l'intervalle $[1, 2]$.
On utilise la suite $u_{n+1} = F(u_n)$ avec $F(x) = 20/(x^2 + 2x + 10)$.

SEMAINES 3 et 4

III. Valeurs d'adhérences [C1, §1.7-1.8]

– Définition d'une valeur d'adhérence. On note $AD((u_n))$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) .

- (1) Propriétés : Si $\lim u_n = l$, alors $AD((u_n)) = \{l\}$; si $\lim u_n = \pm\infty$, alors $AD((u_n)) = \emptyset$.
- (2) Exemples : $AD((-1)^n) = \{\pm 1\}$; exemple de suite (u_n) non convergente et telle que $AD((u_n))$ est un singleton; exemple de $AD((\cos(\frac{2\pi}{3}n + \frac{1}{n})))$, de cardinal 3; exemple de suite (u_n) tel que $AD((u_n))$ est un intervalle : la suite qui à $n = 10^k a_k + \dots + 10a_1 + a_0$ associe le nombre décimal $u_n = 0, a_0 a_1 \dots a_k \in [0, 1[$. Mention de $AD((\sin(n))) = [-1, 1]$, preuve au niveau L2 Maths.
- (3) (*) **Théorème de Bolzano-Weierstrass** : *Toute suite bornée a une valeur d'adhérence.*
Preuve par dichotomie.

– Suite extraite, sous-suite : Définition, puis propriétés :

- (1) Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim u_{\varphi(n)} = l$ pour toute extraction φ .
- (2) Si $AD((u_n)) \neq \emptyset$, alors $l \in AD((u_n))$ si, et seulement si, il existe une extraction φ telle que $\lim u_{\varphi(n)} = l$.

– Exemples de suites extraites.

– limites supérieures et inférieures : définitions, puis :

Théorème : *Si (u_n) est une suite bornée, alors $\limsup(u_n)$ et $\liminf(u_n)$ sont la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence, respectivement, de (u_n) .*

Corollaire : deuxième preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (via $\limsup(u_n) \in AD((u_n))!$).

– Quelques faits :

- (1) $\limsup(u_n)$ et $\liminf(u_n)$ sont finis tous les deux si et seulement si (u_n) est bornée.
- (2) Si (u_n) n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.
- (3) Si $u_n \leq \alpha$ à partir d'un certain rang, alors $\limsup(u_n) \leq \alpha$.
- (4) Si $\limsup(u_n) < \alpha$, alors $u_n < \alpha$ à partir d'un certain rang
- (5) $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$ et $\liminf(u_n + v_n) \geq \liminf(u_n) + \liminf(v_n)$

Théorème (caractérisation des suites bornées convergentes) : *Soit (u_n) une suite bornée. Les faits suivants sont équivalents :*

- (u_n) est convergente,
- $\limsup(u_n) = \liminf(u_n)$,
- (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

SEMAINE 5

IV. Suites de Cauchy, et applications de Bolzano-Weierstrass [C1, §1.9]

Définition d'une suite de Cauchy, puis :

- (1) (*) **Lemme** : *Toute suite de Cauchy est bornée.*
- (2) (*) **Théorème** : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

– Application 1 : preuve du théorème du point fixe.

– Application 2 : introduction aux séries numériques. Soit (a_k) une suite réelle, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

On s'intéresse au comportement de la suite (u_n) , qu'on appelle "série numérique".

(*) **Lemme** : Posons $U_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$. Si la suite (U_n) est majorée, alors la suite (u_n) converge.

(*) **Lemme** : On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que pour tout $k \geq K$ on a $a_k \neq 0$ et $|a_k/a_{k+1}| \leq \rho$. Alors la suite (u_n) converge.

Exemples d'utilisation des deux lemmes ci-dessus : (a) la suite (u_n) , où $u_n := \sum_{k=1}^n \frac{\sin(n)}{n^2}$, est convergente ; (b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(v_n(x))$, où $v_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^n}{n!}$, est convergente.

– Application 3 : Fonctions continues sur un segment :

(1) (*) **Théorème des bornes atteintes** : Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes. Preuve via Bolzano-Weierstrass.

(2) Définition d'une fonction uniformément continue.

Théorème de Heine : Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

SEMAINE 6

– Application 4 : sommes de Riemann :

(1) **Théorème** : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors

$\frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f(a + \frac{k}{n}(b-a))$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(2) La suite $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k}{n}+1}$ tend vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

V. Voisines et relations o , O et \sim entre fonctions [C1, §2.1]

– Définition du voisinage d'un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

– Définition des relations o , O et \sim au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Notation $F = o_{x_0}(G)$ (resp. $F = O_{x_0}(G)$, resp. $F \sim_{x_0} G$) pour désigner le fait que F est négligeable (resp. dominée, resp. équivalente) par rapport à G au voisinage de x_0 .

– Exemples :

— en 0 : $x^a = o_0(x^b)$ si $a > b > 0$

— en 0 : $\ln(x) = o_0(x^{-1})$

— en $+\infty$: $x^\alpha = o_{+\infty}(1)$ si $\alpha < 0$

— en $+\infty$: $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ si $\alpha < \beta$

— en $+\infty$: $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x})$ si $\alpha > 0$ (pour tout $\beta \in \mathbb{R}$)

— en $+\infty$: $\ln^\beta(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$ si $\alpha > 0$ (pour tout $\beta \in \mathbb{R}$)

— en $+\infty$: $\ln(x) \frac{x \sin(x)+2}{\sqrt{x-1}} = O_{+\infty}(\sqrt{x} \ln(x))$

— en 0 : $\frac{1+\sqrt{x} \ln(x)}{x^2} = O_0(\frac{1}{x^2})$

— Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $l \neq 0$, alors $f(x) \sim_{x_0} l$

— en 0 et en $+\infty$: $x + x^2 \sim_0 x$, $x + x^2 \sim_{+\infty} x^2$

(*) **Proposition** :

(i) si $f = o_{x_0}(g)$ et $h = o_{x_0}(g)$ alors $f + g = o_{x_0}(g)$.

(ii) si $f_1 = o_{x_0}(g_1)$ et $f_2 = o_{x_0}(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o_{x_0}(g_1 g_2)$

(iii) si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(h)$ alors $f = o_{x_0}(h)$

(iv) $f \sim_{x_0} g$ ssi $f - g = o_{x_0}(g)$

Même chose en remplaçant o par O (resp. \sim) dans (i)–(iii) (resp. (ii)–(iii)).

Remarque : la relation \sim_{x_0} est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de x_0 , au sens de l'UE "Combinatoire et dénombrement" (réflexivité, symétrie, transitivité sont satisfaites).

(*) **Proposition (lien avec la dérivée) :**

f est dérivable en a ssi $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_a(x - a)$.

Interprétation graphique.

Exemples/applications :

— en 0 : $\frac{\sin(x)}{x} = 1 + o_0(1)$; $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} + o_0(x)$

— en $+\infty$: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1) = \sqrt{x}(\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + o_{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

Donc en particulier $\frac{\sin(x)}{x} \sim_0 1$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+1} \sim_0 1 + \frac{x}{2}$.

Proposition (changement de variables) : $F = o_b(G)$ et $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = b \Rightarrow F \circ \varphi = o_a(G \circ \varphi)$.
Même chose si on remplace o par O ou \sim .

Attention : ça ne marche plus si on "compose" par la gauche : $x \sim_{+\infty} o(x^2)$ mais $\ln(x)$ n'est pas négligeable par rapport à $\ln(x^2)$ en $+\infty$.

Proposition (lien entre "o" et primitive) : Soient f, g deux fonctions continues définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = o_a(g(x))$, alors $F(x) = o_a(G(x))$, où $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x |g(t)|dt$.

Cas particulier : au voisinage de 0 on a : si $f(x) = o_0(x^n)$, alors $F(x) = o_0(x^{n+1})$.

VI. Fonctions de classe C^n et C^∞ , théorème de Taylor-Young et DL [C2, §1-2]

- Définition des fonctions de classe C^n et C^∞
- Exemples de fonctions C^∞ : polynômes, fractions rationnelles, exp, log, sin, cos, Arcsin, Arccos, Arctan
- Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$, est de classe C^1 sur \mathbb{R} mais pas de classe C^2 .

SEMAINE 7

(*) **Proposition** Soit f une fonction de classe C^n au voisinage de a . Si les dérivées $f^{(k)}(a)$ sont nulles pour tout $k = 0, \dots, n$, alors $f(x) = o((x - a)^n)$.

Exemple : $\sin(x^2) - x^2 = o(x^5)$ en 0.

(*) **Théorème (Taylor-Young)** Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n . On a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

Définition de "une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité en un point $a \in I$ " (où I est un intervalle ouvert). Notation : " f a un $DL_n(a)$ ".

(*) **Proposition** Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a un $DL_n(a)$, il est unique.

- Une conséquence de Taylor-Young : toute fonction f de classe C^n au voisinage d'un point a admet un $DL_n(a)$; la réciproque est fautive : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \cos(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ admet un $DL_2(0)$, mais f n'est pas C^2 au voisinage de 0.
- **Les DL en 0 des fonctions classiques sont à connaître absolument :**

$$\exp, \sin, \cos, \ln(1+x), 1/(1-x), (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- Opérations sur les DL en 0 : somme, produit et composition.
- exemple : le $DL_6(0)$ de $f(x) = \sin(x^3 + \sin(x))$ est $f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^6)$.
Le $DL_3(0)$ de $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2(1+x)})$ est $f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x^2 + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48})x^3 + o(x^3)$.

(*) **Proposition (Intégration des DL)** Soit f continue au voisinage de a et F une primitive de f . Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ de la forme $F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$.

La réciproque de la proposition est fautive : prendre $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$; f est C^1 , a un $DL_2(0)$, mais f' n'a pas de $DL_1(0)$ car pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x})$, or $3x^2 \sin(\frac{1}{x})$ peut s'écrire $x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, donc c'est un $o_0(x)$, mais $\cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite (en particulier ne tend pas vers 0) lorsque x tend vers 0.

SEMAINES 8 ET 9

VII. Autres applications des DL [C2, pages 21-30]

- Utilisation des DL pour le calcul de limites de fonctions ; exemples.
- Développements asymptotiques : définition, exemples.
- Utilisation des DL pour déterminer la position d'une courbe par rapport à ses tangentes.
- étude des extréma locaux.

VIII. DL de Taylor-Lagrange [C2, pages 13 à 20]

- Énoncé du théorème de Taylor-Lagrange (preuve sur le poly [C2]) :

Théorème (Taylor-Lagrange) Soit I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ tels que $a < b$, et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $(n+1)$ -fois dérivable sur I . Il existe $\theta \in]a, b[$ tel que l'on ait le " $DL_n(a)$ de Taylor-Lagrange" :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f^{(n+1)}(\theta) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La formule reste vraie en échangeant a et b .

- Application 1 : approximation d'une valeur de fonction ; exemple : approximer $\ln(1,01)$ à 10^{-5} près.
- Applications 2 : lorsque $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ , énoncé de deux conditions suffisantes pour que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sup_{t \in [a, x]} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0.$$

Dans cette situation on a un "développement limité infini" :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right).$$

Exemples : les fonctions exp, cos, sin admettent un tel développement.

IX. Séries numériques [C3]

- (1) Définitions. Quelques séries connues : $\sum q^k$, $\sum \frac{1}{n}$ (Exercice 6), $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (Exercice 62), $\sum \frac{1}{n^2}$ (vue au chapitre I).
- (2) Propriétés "de transfert" :
 - $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 - $\sum |a_k|$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.
 - $\sum u_n$ converge \Rightarrow la série des restes $R_N := \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ tend vers 0.

SEMAINES 10 et 11

Énoncés, preuves et exemples des propriétés suivantes :

- (1) soient (a_k) et (b_k) deux suites à termes **positifs** telles que $a_k \sim_{k \rightarrow +\infty} b_k$. Alors les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature. De plus, dans le cas où ces séries divergent on a $\sum_{k=0}^n a_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_k$, et dans le cas où elles convergent on a $\sum_{k=n}^{\infty} a_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{\infty} b_k$.
- (2) Critères de d'Alembert et de Cauchy pour la convergence des séries à termes positifs.
- (3) Comparaison Série – Intégrale : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow]0, \infty[$ continue décroissante et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors la série $\sum f(k)$ est convergente ssi $\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty$. De plus, si $\sum f(k)$ diverge, alors on a un équivalent $\sum_{k=0}^n f(k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(t) dt$.
- (4) Critère spécial des séries alternées.
- (5) Exemples, dont : séries de Riemann et de Bertrand