Université de Montpellier

Faculté des Sciences

HA8201H - Maths PEIP S2

Devoir Encadré n°2 du 20/03/2026

Correction

Exercice 1. Soient a et b deux nombres complexes, pour tout entier $n \geqslant 1$, d_n le déterminant suivant (où n désigne la taille de la matrice) :

$$d_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

a) Calculer d_1, d_2 et d_3.

b) Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer une relation de récurrence entre d_n et d_{n-1}.

c) En déduire l'expression de d_n en fonction de n, a et b.

Correction. a)

$$d_1 = \begin{vmatrix} a+b \end{vmatrix} = a+b.$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2.$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ a & a+b & b \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$$

En retranchant la seconde colonne à la première, on obtient

$$d_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ -b & a+b & b \\ 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne, on obtient

$$d_3 = a \begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} b & b \\ a & a+b \end{vmatrix} = a((a+b)^2 - ab) + b(b(a+b) - ab) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

b) Soit $n \geqslant 2$ un entier. En retranchant la seconde colonne à la première, on obtient

$$d_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ -b & a+b & b & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne, on obtient

$$d_n = ad_{n-1} + b \begin{vmatrix} b & b & b & \dots & b \\ a & a+b & b & \dots & b \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

En retranchant la première colonne à toutes les suivantes, on obtient

$$d_n = ad_{n-1} + b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & b-a & \dots & b-a \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-a \\ a & 0 & \dots & 0 & b \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première ligne, on obtient

$$d_n = ad_{n-1} + b^2 \begin{vmatrix} b & b-a & \dots & b-a \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-a \\ 0 & \dots & 0 & b \end{vmatrix} = ad_{n-1} + b^n.$$

On a utilisé le fait que le dernier déterminant est le déterminant d'une matrice triangulaire de taille $n-2$ en raison des deux développements précédents.

c) Le calcul des premiers termes donne

$$\begin{aligned} &d_1 = a+b \\ &d_2 = ad_1 + b^2 = a^2 + ab + b^2 \\ &d_3 = ad_2 + b^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ &d_4 = ad_3 + b^4 = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

On peut formuler l'hypothèse que pour tout entier $n \geqslant 1$, la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante est vraie :

$$\mathcal{P}_n : d_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

On démontre cette propriété par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, on a

$$d_1 = a + b = \sum_{k=0}^{1} a^{1-k} b^k,$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$. Alors, en utilisant le résultat de b), on obtient

$$d_{n+1} = ad_n + b^{n+1} = a \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k} b^k + a^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie. On a ainsi montré par récurrence que

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k,$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où

$$u_1 = (1, 1, 2), \quad u_2 = (1, a, 2) \quad \text{et} \quad u_3 = (1, a, a+2).$$

On note $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_3)$.

a) Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Dans les cas où $\mathcal{F}$ n'est pas une base, déterminer les dimensions de E, F, $E + F$ et $E \cap F$.

c) Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{F}$ est une base. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

d) Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

Correction. a) On cherche les valeurs de a pour lesquelles le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ s'annule :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 2 & 2 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1),$$

en retranchant la seconde colonne à la troisième puis en développant suivant la troisième colonne. On obtient que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

b) Pour $\mathbf{a = 0}$:
Comme $u_1 = (1, 1, 2)$ et $u_2 = (1, 0, 2)$ sont non colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre et $\dim(E) = 2$. Comme $u_3 = (1, 0, 2)$ est non nul, on a $\dim(F) = 1$. Par ailleurs, $u_3 = u_2 \in E$, donc $F = \mathrm{Vect}(u_3) \subset E$ et $E \cap F = F$. D'où $\dim(E \cap F) = 1$ et $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2$.
Pour $\mathbf{a = 1}$:
Comme $u_2 = (1, 1, 2) = u_1$, on a $E = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $\dim(E) = 1$ car u_1 est non nul. Par ailleurs, comme $u_3 = (1, 1, 3)$ est non nul, on a $\dim(F) = 1$. On a alors $E + F = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ et $\dim(E + F) = 2$ car u_1 et u_3 ne sont pas colinéaires. On a finalement $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) = 0$.

c) On a $E+F=\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Comme $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, elle est génératrice et $E+F=\operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3)=\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, la famille $\mathcal{F}$ étant libre, la sous-famille (u_1,u_2) est aussi libre et $\dim(E)=2$. Comme u_3 est non nul, on a $\dim(F)=1$. Finalement, on obtient

$$\dim(E\cap F)=\dim(E)+\dim(F)-\dim(E+F)=0.$$

Donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et la somme est directe. On a ainsi montré que $E\oplus F=\mathbb{R}^3$, soit que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

d) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a\\2&2&a+2\end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de v dans la base $\mathcal{F}$ sont données par

$$P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

On calcule P^{-1} par la méthode de la double matrice en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss. La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&a&a&0&1&0\\2&2&a+2&0&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$$

On échelonne la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&a-1&a-1&-1&1&0\\0&0&a&-2&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{c}L_1\\L_2-L_1\\L_3-2L_1\end{array}$$

Comme $a-1\neq 0$ et $a\neq 0$, la matrice est bien échelonnée. On continue en la réduisant

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&\frac{a+2}{a}&0&-\frac{1}{a}\\0&a-1&0&\frac{a-2}{a}&1&\frac{1-a}{a}\\0&0&1&\frac{-2}{a}&0&\frac{1}{a}\end{array}\right)\quad\begin{array}{c}L_1-\frac{1}{a}L_3\\L_2-\frac{a-1}{a}L_3\\\frac{1}{a}L_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{a}{a-1}&-\frac{1}{a-1}&0\\0&1&0&\frac{a-2}{a(a-1)}&\frac{1}{a-1}&-\frac{1}{a}\\0&0&1&\frac{-2}{a}&0&\frac{1}{a}\end{array}\right)\quad\begin{array}{c}L_1-\frac{1}{a-1}L_2\\\frac{1}{a-1}L_2\\L_3\end{array}$$

On obtient donc

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-1}&-\frac{1}{a-1}&0\\\frac{a-2}{a(a-1)}&\frac{1}{a-1}&-\frac{1}{a}\\\frac{-2}{a}&0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

et les coordonnées de v dans $\mathcal{F}$ sont donc

$$P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-1}&-\frac{1}{a-1}&0\\\frac{a-2}{a(a-1)}&\frac{1}{a-1}&-\frac{1}{a}\\\frac{-2}{a}&0&\frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-1}x-\frac{1}{a-1}y\\\frac{a-2}{a(a-1)}x+\frac{1}{a-1}y-\frac{1}{a}z\\\frac{-2}{a}x+\frac{1}{a}z\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\ker(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur u qui l'engendre.

b) Soient $v = (1, -2, 1)$ et $w = (2, -1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{2n+1} = f$.

Correction. a) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+3z \\ x-2y-3z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}.$$

Donc $(x, y, z) \in \ker(f)$ si et seulement si (x, y, z) est solution du système linéaire homogène

$$\begin{cases} -2x+y+3z &= 0 \\ x-2y-3z &= 0 \\ -x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système associé est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss. On commence par échelonner la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_2 \\ L_1+2L_2 \\ L_3+L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_3 \\ L_2-3L_3 \end{array}$$

Il y a 2 variable principales et 1 variable libre, on sait que $\ker(f)$ est de dimension 1. On continue en réduisant la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ -L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases}$$

On obtient

$$\ker(f) = \{(z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,-1,1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u),$$

où $u = (1, -1, 1)$.

b) On calcule le déterminant de la famille (u, v, w) dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0,$$

en retranchant la troisième ligne à la première puis en développant suivant la première ligne. Comme ce déterminant est non nul, on en déduit que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
En utilisant la matrice de f dans la base canonique, on calcule $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et l'on détermine leurs coordonnées dans la base (u, v, w).

$$\begin{aligned} f(u) &= 0_{\mathbb{R}^3} = 0.u + 0.v + 0.w \\ f(v) &= (-1, 2, -1) = -v = 0.u - 1.v + 0.w \\ f(w) &= (-2, 1, -1) = -w = 0.u + 0.v - 1.w \end{aligned}$$

Les coordonnées respectives de $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base (u, v, w) sont donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice de f dans cette base est donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) La matrice de f^{2n+1} dans la base (u, v, w) est B^{2n+1}. Comme la matrice B est diagonale, on a

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Comme f^{2n+1} et f ont la même matrice dans cette base, on obtient que $f^{2n+1} = f$.