



HA8201H - Maths PEIP S2

Devoir Encadré n°2 du 20/03/2026

Exercice 1. Soient a et b deux nombres complexes, pour tout entier $n \geq 1$, d_n le déterminant suivant (où n désigne la taille de la matrice) :

$$d_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

- Calculer d_1 , d_2 et d_3 .
- Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer une relation de récurrence entre d_n et d_{n-1} .
- En déduire l'expression de d_n en fonction de n , a et b .

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 où

$$u_1 = (1, 1, 2), \quad u_2 = (1, a, 2) \quad \text{et} \quad u_3 = (1, a, a+2).$$

On note $E = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $F = \text{Vect}(u_3)$.

- Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^3 .
- Dans les cas où \mathcal{F} n'est pas une base, déterminer les dimensions de E , F , $E + F$ et $E \cap F$.
- Dans ce qui suit, on suppose que \mathcal{F} est une base. Montrer que E et F sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- Donner la matrice de passage de la base canonique \mathcal{C} vers \mathcal{F} . Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base \mathcal{F} .

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $\ker(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur u qui l'engendre.
- Soient $v = (1, -2, 1)$ et $w = (2, -1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de f dans cette base.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{2n+1} = f$.