MODULE HAX201X
ANNÉE 2025/2026

Corrigé du CC1, 12 mars 2026
Durée : 1 h 15

La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos arguments.

Documents, calculettes et téléphones portables sont interdits.

Le barême est indicatif.

Questions de cours (7 points)

Dans cet exercice vous devez énoncer les résultats du cours que vous utilisez.

Soit (u_n) une suite réelle.

(1) Donner la définition d'une valeur d'adhérence de (u_n) sans utiliser les sous-suites.

Cf. cours.

(2) Dans cette question on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$. Quelles propriétés de l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) pouvez-vous en déduire ? Justifiez votre réponse.

D'après l'hypothèse :

(a) la suite (u_n) est bornée, donc (u_n) possède des valeurs d'adhérence (théorème de Bolzano-Weierstrass) ;

(b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$, les valeurs d'adhérence de (u_n) sont toutes incluses dans l'intervalle $[0,1]$, car la plus petite (resp. grande) valeur d'adhérence de (u_n) est $\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_k, k \geq n\}$ (resp. $\limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_k, k \geq n\}$) et on a des inclusions $\inf\{u_k, k \geq n\}, \sup\{u_k, k \geq n\} \subset [0,1]$.

(3) Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

On raisonne par récurrence. Supposons que (u_n) n'est pas majorée. Prenons une suite réelle (M_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty$. D'après l'hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > M_0$. Supposons construits $n_0 < \ldots < n_k \in \mathbb{N}$ tels que $u_{n_k} > M_k$. Alors, à nouveau d'après l'hypothèse, l'ensemble des entiers n pour lesquels $u_n > M_{k+1}$ est infini, donc il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_{k+1}} > M_{k+1}$, et on peut choisir $n_{k+1} > n_k$. La suite (u_{n_k}) ainsi construite est extraite de (u_n), et vérifie $\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$ (l'extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par $\varphi(k) = n_k$).

(4) Montrer que si

$$\exists k \in]0,1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq k^n$$

alors (u_n) est une suite de Cauchy.

Soient $\varepsilon > 0$, et $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q$. Par inégalités triangulaires et somme géométrique on a

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| \leq |u_p - u_{p-1}| + \ldots + |u_{q+1} - u_q| \leq \underbrace{k^{p-1} + \ldots + k^q} \\ = k^q(k^{p-q-1} + \ldots + 1) \\ = k^q \frac{1-k^{p-q}}{1-k}. \end{aligned}$$

Comme $k \in]0,1[$, on a $\frac{1-k^{p-q}}{1-k} \leq \frac{1}{1-k}$ et $\lim_{q\to+\infty} k^q = 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq N \Rightarrow k^q \frac{1-k^{p-q}}{1-k} < \varepsilon$. Conclusion : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$. Ceci montre que (u_n) est une suite de Cauchy.

(5) Dans cette question on suppose que $u_0 \in [0,1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) := \frac{1}{2+x}$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0,1]$, et en déduire que f est contractante, puis que (u_n) converge.

On a $f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis (l'application f est définie et dérivable en tout point $x \in [0,1]$), pour tous $x, y \in [0,1]$ on a $|f(x) - f(y)| \leq (\sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|) \cdot |x-y|$. Pour tout $t \in [0,1]$ on a $|f'(t)| = \frac{1}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4} < 1$, donc f est contractante.
Comme $f'(x) < 0$, f est décroissante, et donc $f([0,1]) \subset [f(1), f(0)] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \subset [0,1]$. Le théorème du point fixe pour $f\colon [0,1] \to [0,1]$ contractante implique que (u_n) converge.

Exercice (6 points)

Calculer les limites suivantes, en justifiant précisément vos calculs :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{e^{\sqrt{n}} + \cos(n)},$$

On écrit par exemple

$$\frac{n^2 \ln(n)}{e^{\sqrt{n}} + \cos(n)} = \frac{n^2 \ln(n)}{n^3} \frac{(\sqrt{n})^6}{e^{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos(n)}{e^{\sqrt{n}}}}.$$

Par croissances comparées les deux premières fractions tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$, et la dernière fraction tend vers 1. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{e^{\sqrt{n}}+\cos(n)} = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} (e^{2n^2} + 1)^{\frac{1}{n^2}},$$

On écrit $(e^{2n^2} + 1)^{\frac{1}{n^2}} = \exp\left(\frac{1}{n^2} \ln(e^{2n^2} + 1)\right)$, et $\frac{1}{n^2} \ln(e^{2n^2} + 1) = \frac{1}{n^2}(\ln(e^{2n^2}) + \ln(1 + e^{-2n^2})) = 2 + \frac{1}{n^2} \ln(1 + e^{-2n^2})$. Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} (e^{2n^2} + 1)^{\frac{1}{n^2}} = e^2$.

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right),$$

Il s'agit de la limite du taux de variation de la fonction cos en 0 : on a $\lim_{n\to+\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2}.$$

On voit une somme de Riemann : $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{(k/n)}{(k/n)^2+1}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+n^2} = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = [\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice (7 points)

Ici vous pouvez utiliser le résultat d'une question non traitée pour répondre aux questions suivantes.

Soient (u_n) la suite récurrente définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$, et $u_0 \in]2, +\infty[$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in]0,2[$ et $u_{2n} \in]2,+\infty[$.

On pose $f(x) := 1 + \frac{2}{x}$ pour $x > 0$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$; le tableau de variation de f montre immédiatement que $f(]2,+\infty[) \subset]0,2[$ et $f(]0,2[) \subset]2,+\infty[$. Comme $u_0 \in]2,+\infty[$, on a $u_1 = f(u_0) \in]0,2[$, et une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in]0,2[$ et $u_{2n} \in]2,+\infty[$.

(2) On pose $v_n = u_{2n}$.

(a) Montrer que (v_n) est une suite récurrente pour une fonction que l'on précisera.

On a $v_n = u_{2n} = (f \circ f)(u_{2n-2}) = (f \circ f)(v_{n-1})$, et $(f \circ f)(x) = 1 + \frac{2}{f(x)} = \frac{3x+2}{x+2}$ par un calcul immédiat. Ainsi $v_n = g(v_{n-1})$ où $g(x) := \frac{3x+2}{x+2}$.

(b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante.

On a $v_0 = u_0 \in]2,+\infty[$, et $g(]2,+\infty[) = (f \circ f)(]2,+\infty[) \subset]2,+\infty[$ d'après la question (1). Comme $v_n = g(v_{n-1})$, on doit étudier $g\colon]2,+\infty[\to]2,+\infty[$. Or $g(x) - x = \frac{3x+2-x(x+2)}{x+2} = \frac{-x^2+x+2}{x+2} = \frac{-(x+1)(x-2)}{x+2}$, donc $g(x) - x < 0$ lorsque $x > 2$. D'après le cours (ou une récurrence immédiate), il s'ensuit que (v_n) est décroissante.

(3) Montrer que (u_{2n}) converge, et calculer $\ell := \lim_{n\to\infty} u_{2n}$.

La suite $(v_n) = (u_{2n})$ est décroissante d'après la question (2b), et minorée par 2 (car $g(]2,+\infty[) \subset]2,+\infty[$), donc elle converge (par le théorème de convergence des suites monotones). La fonction g étant continue, la limite de (v_n) est un point fixe de g. Or pour $x > 0$, $g(x) - x = 0$ si, et seulement si, $x = 2$ (cf. calcul ci-dessus). Par conséquent $\ell := \lim_{n\to\infty} u_{2n} = 2$.

(4) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell$, puis que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Comme f est continue on a $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_{2n}) = f(\lim_{n\to\infty} u_{2n}) = f(2) = 2$. Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $\ell = 2$, et tout terme de (u_n) est un terme de l'une de ces sous-suites, donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.