MODULE HAX201X
ANNÉE 2025/2026

CC1, 12 mars 2026
Durée : 1 h 15

La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos arguments.

Documents, calculettes et téléphones portables sont interdits.

Le barême est indicatif.

Questions de cours (7 points)

Dans cet exercice vous devez énoncer les résultats du cours que vous utilisez.

Soit (u_n) une suite réelle.

(1) Donner la définition d'une valeur d'adhérence de (u_n) sans utiliser les sous-suites.

(2) Dans cette question on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$. Quelles propriétés de l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) pouvez-vous en déduire ? Justifiez votre réponse.

(3) Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

(4) Montrer que si

$$\exists k \in]0,1[, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq k^n$$

alors (u_n) est une suite de Cauchy.

(5) Dans cette question on suppose que $u_0 \in [0,1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) := \frac{1}{2+x}$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0,1]$, et en déduire que f est contractante, puis que (u_n) converge.

Exercice (6 points)

Calculer les limites suivantes, en justifiant précisément vos calculs :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{e^{\sqrt{n}} + \cos(n)}, \quad \lim_{n\to+\infty} (e^{2n^2}+1)^{\frac{1}{n^2}}, \quad \lim_{n\to+\infty} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

Exercice (7 points)

Ici vous pouvez utiliser le résultat d'une question non traitée pour répondre aux questions suivantes.

Soient (u_n) la suite récurrente définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$, et $u_0 \in]2, +\infty[$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in]0,2[$ et $u_{2n} \in]2,+\infty[$.

(2) On pose $v_n = u_{2n}$.

  (a) Montrer que (v_n) est une suite récurrente pour une fonction que l'on précisera.

  (b) En déduire que la suite (v_n) est décroissante.

(3) Montrer que (u_{2n}) converge, et calculer $\ell := \lim_{n\to\infty} u_{2n}$.

(4) Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell$, puis que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.