

Corrigé – Contrôle continu 1 HAX604
Université de Montpellier – Licence 3 Mathématiques

Exercice 1

1. Euler implicite (12 pts)

Q1-Consistance

L'erreur de consistance du schéma est obtenue en substituant la solution exacte à la solution approchée:

$$\epsilon(h) := y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

En développant la solution exacte au point t_{n+1} , on trouve

$$y(t_n) = y(t_{n+1} - h) = y(t_{n+1}) - hy'(t_{n+1}) + O(h^2) = y(t_{n+1}) - hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + O(h^2).$$

Donc l'erreur de consistance est $O(h^2)$. (2 pts)

Q2-Point fixe

On écrit

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (1)$$

Posons

$$g(y) = y_n + hf(t_{n+1}, y). \quad (2 \text{ pts})$$

On a

$$|g(y) - g(z)| \leq hL|y - z|. \quad (1 \text{ pt})$$

Si $hL < 1$, g est contractante. Par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique y_{n+1} . (2pts)

On définit la fonction $\varphi(t_n, y_n, h)$ comme la solution unique de l'équation implicite (1).

Soient y et z deux solutions de l'équation implicite, on a

$$y = y_n + hf(t_{n+1}, y) \quad \text{et} \quad z = z_n + hf(t_{n+1}, z).$$

En soustrayant, on trouve

$$|y - z| \leq |y_n - z_n| + h|f(t_{n+1}, y) - f(t_{n+1}, z)| \leq |y_n - z_n| + hL|y - z|.$$

Donc

$$|y - z| \leq \frac{1}{1 - hL}|y_n - z_n|.$$

Pour $hL < 1/2$ (par exemple) on a $1/(1 - hL) < 2$. Ainsi, la fonction φ est lipschitzienne par rapport à y_n . (2 pts)

Il suffit de choisir $\Phi(t, y, h) = f(t + h, \varphi(t, y, h))$ pour que le schéma soit de la forme $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$. Par composition de fonctions lipschitziennes, Φ est lipschitzienne par rapport à y . (2pts)

Q3-Convergence

Le schéma est sous la forme d'un schéma à un pas consistant, dont l'erreur de consistance est $O(h^2)$. Par le théorème de convergence, le schéma est donc convergent d'ordre 1. (1pt)

Exercice 2 (8 pts)

Q1. Consistance

On définit les polynômes associés :

$$\rho(r) = r^2 - ar - b, \quad \sigma(r) = \alpha r + \beta.$$

Les conditions $\rho(1) = 0$ et $\rho'(1) = \sigma(1)$ donnent

$$a + b = 1, \quad a + \alpha + \beta = 2 \quad (2pts)$$

Q2. Adams–Bashforth à deux pas

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Consistance

Ici

$$a = 1, \quad b = 0, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

On vérifie que les conditions de consistance sont vérifiées :

$$a + b = 1, \quad a + \alpha + \beta = 2. \quad (1pt)$$

Stabilité

Partie homogène :

$$y_{n+2} - y_{n+1} = 0.$$

Polynôme caractéristique :

$$\rho(r) = r^2 - r = r(r - 1).$$

Les racines sont 0 et 1, la racine 1 est simple : la condition de stabilité zéro est vérifiée. (1pt)

Ordre

Calculons l'erreur de consistance

$$\epsilon(h) = y(t_{n+2}) - y(t_{n+1}) - \frac{h}{2}(3f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_n, y(t_n))).$$

Développons en prenant comme point de base t_{n+1} .

$$\epsilon(h) = y(t_{n+1} + h) - y(t_{n+1}) - \frac{h}{2}(3y'(t_{n+1}) - y'(t_{n+1} - h)).$$

On a utilisé le fait que $t \mapsto y(t)$ est solution l'équation différentielle.

Un calcul de développement limité donne

$$\epsilon(h) = y(t_{n+1}) + hy'(t_{n+1}) + \frac{h^2}{2}y''(t_{n+1}) + \mathcal{O}(h^3) - y(t_{n+1}) - \frac{h}{2}(3y'(t_{n+1}) - y'(t_{n+1}) + hy''(t_{n+1}) + \mathcal{O}(h^2)).$$

après simplification il reste

$$\epsilon(h) = \mathcal{O}(h^3). \quad (3 \text{ pts})$$

Conclusion : le schéma est stable, consistant et donc convergent d'ordre 2. (1pt)