UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

Session : contrôle continu 1	Durée de l'épreuve : 1h30
Date : 10/03/2025	Documents autorisés : néant
UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)	Matériels autorisés : néant.

Les deux exercices sont indépendants. Les questions $\star$ sont plus difficiles et peuvent être admises. Toute réponse devra être soigneusement justifiée. Les développements limités devront être explicitement rédigés.

Dans tout ce qui suit on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où $T > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est supposée suffisamment régulière et lipschitzienne par rapport à la seconde variable. On note $h > 0$ le pas de temps et $t_n = nh,\ n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 — Schémas à un pas. (12 pts)

On considère le schéma d'Euler *implicite* défini par

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \tag{1}$$

1. (2 pts) Estimer l'erreur de consistance du schéma.
2. On suppose que f est lipschitzienne en y de constante L.
   (a) (2 pts) Montrer que la détermination de y_{n+1} revient à résoudre une équation de point fixe
   $$y = g(y),$$
   avec une fonction g (dépendant de y_n) que l'on précisera.
   (b) (1 pt) Montrer que, si h est tel que $hL < 1$, l'application g est contractante.
   (c) (2 pts) En déduire que pour h suffisamment petit, il existe un unique y_{n+1} solution de l'équation (1).
   (d) ($\star$ 2pts) On note $y_{n+1} = \varphi(t_n, y_n, h)$ la solution de l'équation (1). Montrer que φ est lipschitzienne par rapport à la variable y_n pour h suffisamment petit.
   (e) ($\star$ 2pts) Ecrire le schéma d'Euler implicite sous la forme d'une méthode à un pas, c'est-à-dire construire une fonction $\Phi(t, y, h)$ *lipschitzienne* par rapport à y telle que le schéma s'écrive :
   $$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(t_n, y_n, h).$$
3. (1 pt) En déduire que la méthode d'Euler implicite est convergente et préciser son ordre de convergence.

T.S.V.P.

Exercice 2 — Schémas multipas (8 pts)

On considère un schéma à deux pas de la forme

$$y_{n+2} = ay_{n+1} + by_n + h\left(\alpha f_{n+1} + \beta f_n\right),$$

où $f_j = f(t_j, y_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

1. (2 pts) Déterminer les conditions sur a et b pour que le schéma soit consistant.
2. On considère le schéma d'Adams–Bashforth à deux pas :

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\left(3f_{n+1} - f_n\right).$$

   (a) (1 pt) Vérifier que ce schéma est consistant.
   (b) (1 pt) Est-ce que le schéma est stable ? Justifier.
   (c) (3 pts) Montrer que l'erreur de consistance du schéma est de l'ordre de h^3.
   (d) (1 pt) En déduire que le schéma est convergent et préciser son ordre de convergence.