

COURS ET EXERCICES DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Michel Bellieud

26 février 2026

Table des matières

1	Préliminaires Mathématiques	7
1.1	Notations	7
1.1.1	Notations des scalaires, vecteurs et matrices.	7
1.1.2	Composantes des vecteurs et matrices.	7
1.1.3	Notations simplifiée des dérivées partielles.	7
1.1.4	Convention de sommation des indices répétés d'Einstein.	8
1.1.5	Produit tensoriel de deux vecteurs.	8
1.1.6	Le symbole de Kronecker δ_{ij}	9
1.1.7	Le symbole d'orientation ε_{ijk}	9
1.2	Produit vectoriel et produit mixte.	11
1.2.1	Produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$	11
1.2.2	Produit mixte.	11
1.2.3	Application au calcul du déterminant d'une matrice 3×3	12
1.3	Matrices symétriques	13
1.4	Matrices orthogonales	14
1.5	Théorème de décomposition polaire d'une matrice $n \times n$	14
1.6	Matrice des cofacteurs (comatrice)	15
1.7	Opérateurs différentiels courants.	16
1.7.1	Laplacien d'un champ scalaire	16
1.7.2	Divergence d'un champ vectoriel	16
1.7.3	Gradient d'un champ scalaire	16
1.7.4	Rotationnel d'un champ vectoriel	17
1.7.5	Gradient d'un champ vectoriel	17
1.7.6	Divergence d'un champ matriciel	18
1.7.7	Laplacien d'un champ vectoriel	18
1.7.8	Exercices.	18
1.7.9	Exercices supplémentaires.	19
1.7.10	Dérivées partielles d'application composées de plusieurs variables	19
1.7.11	Application : dérivée particulière.	20
1.7.12	Lemme de Poincaré et variante.	20
1.7.13	Version bidimensionnelle du Lemme de Poincaré	22
1.7.14	* Variante du Lemme de Poincaré.	22
1.8	Théorème de Stokes	23
1.8.1	Applications	24
2	Cinématique des milieux continus	27
2.1	Définition du mouvement d'un milieu continu.	27
2.2	Vitesse.	28
2.3	Accélération. Dérivées particulières.	28
2.4	Dérivée particulière d'une intégrale de volume.	29
2.4.1	La formule de changements de variables	29

3	Lois de conservation	33
3.1	Loi de conservation de la masse	33
3.1.1	Equation de continuité.	33
3.2	Loi de conservation de la quantité de mouvement. Principe Fondamental de la Dynamique.	34
3.3	Equations du mouvement et équations d'équilibre d'un milieu continu	34
3.4	Théorème de Cauchy	37
3.5	Conservation de l'énergie	40
3.5.1	Premier principe de la thermodynamique	40
3.5.2	Tenseur des vitesses de déformation	40
3.5.3	Equation de l'énergie	40
3.5.4	Cas d'un milieu au repos : équation de la chaleur, loi de Fourier.	42
3.6	Second principe de la thermodynamique. Inégalité de Clausius-Duhem	43
3.6.1	Second principe de la thermodynamique.	43
3.6.2	Inégalité de Clausius-Duhem	43
4	Etude du tenseur des contraintes	45
4.1	Exercice : cercles de Mohr	45
4.2	Exercice : tenseur des contraintes plan. Fonction d'Airy	48
5	Etude des déformations	51
5.1	Notion de déformation	51
5.2	Tenseur des dilatations. Tenseur des déformations de Green-Lagrange	52
5.3	Variation des longueurs	53
5.4	Variations d'angles	54
5.5	Changement de variable pour les intégrales de surfaces	55
5.6	* Dérivée particulaire d'une intégrale de surface.	56
6	Equations de l'élasticité linéaire	59
6.1	Notations.	59
6.2	Définition générale d'un matériau élastique	59
6.3	Ecriture des équations du mouvement en coordonnées de Lagrange.	59
6.4	Loi de comportement d'un milieu continu élastique.	61
6.5	Linéarisation des équations de l'élasticité.	61
6.5.1	Principe de la linéarisation	61
6.5.2	Tenseur des déformations linéarisées	62
6.5.3	Linéarisation de la loi de comportement	62
6.5.4	Expression linéarisée du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}$. . .	63
6.5.5	Expression linéarisée du tenseur des contraintes σ	63
6.5.6	Linéarisation des équations du mouvement	64
6.5.7	Conditions aux limites linéarisées	65
6.5.8	Lien entre dérivées par rapport aux variables de Lagranges et dérivées par rapport aux variables d'Euler dans l'approximation linéaire	65
6.5.9	Équations de l'élasticité linéaire	66
6.6	Conséquence de l'existence d'une énergie interne de déformation	66
6.7	Isotropie. Loi de Hooke	68
6.7.1	Définition d'un milieu élastique isotrope	68
6.7.2	Energie élastique d'un milieu élastique linéaire isotrope	69
6.7.3	Loi de comportement d'un milieu élastique linéaire isotrope : Loi de Hooke. Coef- ficients de Lamé.	70
6.7.4	Calcul des coefficients d'élasticité d'un matériau élastique linéaire isotrope en fonc- tion des coefficients de Lamé	71

7	Existence et unicité de la solution d'un problème d'élasticité linéaire	73
7.1	Exemple 1 : Problème d'équilibre avec condition aux limites de Dirichlet homogènes. . . .	73
7.1.1	Espace de Hilbert $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Inégalités de Poincaré et de Korn. Théorème de Lax Milgram.	73
7.1.2	Application au problème (7.1.1) (voir aussi [2][paragraphe IX.5])	75
7.2	Exemple 2 : Problème d'équilibre avec condition aux limites de Dirichlet inhomogènes. . .	77
7.3	Exemple 3 : Problème d'équilibre avec condition aux limites mixtes de Dirichlet homogènes et de Neumann homogènes.	77
8	Problèmes d'élasticité linéaire	79
8.1	Problème 1 : compression uniforme	79
8.1.1	Enoncé du problème et mise en équation	79
8.1.2	Solution du problème et conséquences	79
8.2	Problème 2 : traction simple	80
8.2.1	Enoncé du problème	80
8.2.2	Mise en équations	80
8.2.3	Résolution	81
8.2.4	Analyse de la solution obtenue. Module de Young.	81
8.2.5	Coefficient de Poisson.	82
8.3	Problème 3 : cisaillement simple	82
8.3.1	Loi de comportement	83
8.3.2	Equations d'équilibre	83
8.3.3	Tenseur des déformations linéarisé	83
8.3.4	Tenseur des contraintes	83
8.3.5	Forces volumiques	83
8.3.6	Forces surfaciques	83
9	Equations de Navier, conditions de compatibilités, équations de Beltrami	85
9.1	Equations de Navier	85
9.2	Equations de compatibilités	86
9.2.1	Trois formulations équivalentes des équations de compatibilités	88
9.3	Equations de Beltrami	90
9.4	Champ de déformations planes. Champ de contraintes planes	91
9.4.1	Champ de déformations planes	91
9.4.2	Champ de contraintes planes	92
9.4.3	Fonction d'Airy	93
10	Références	95

Chapitre 1

Préliminaires Mathématiques

1.1 Notations

1.1.1 Notations des scalaires, vecteurs et matrices.

Dans ce qui suit, les scalaires et les points de l'espace sont représentés par des symboles commençant par des lettres minuscules (exemple $x, i, \det \mathbf{A} \dots$) et les vecteurs et les fonctions à valeurs vectorielles par des symboles commençant par des lettres minuscules en caractères gras (exemples : $\mathbf{x}, \mathbf{x}_T, \mathbf{i}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}, \dots$). Les matrices sont représentées par des symboles commençant par des lettres majuscules en caractère gras avec les exceptions suivantes : $\nabla \mathbf{u}$ (gradient du déplacement), $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ (tenseur d'élasticité linéarisé), $\boldsymbol{\sigma}$ (tenseur des contraintes). Le symbole $\mathbf{I}$ représente la matrice identité 3×3 :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Composantes des vecteurs et matrices.

- On note $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (elle est orthonormée).
- On note u_i ou $(\mathbf{u})_i$ les composantes d'un vecteur $\mathbf{u}$ dans la base canonique, c'est à dire $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u})_i \mathbf{e}_i$.
- On note $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u})_i (\mathbf{v})_i$).
- On note A_{ij} ou $(\mathbf{A})_{ij}$ les composantes d'une matrice $\mathbf{A}$: A_{ij} est la composante se trouvant sur la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de $\mathbf{A}$.
- On note $\mathbf{AB}$ le produit de deux matrices ($(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} B_{kj}$).
- On note $\mathbf{A}:\mathbf{B}$ le produit "scalaire" de deux matrices ($\mathbf{A}:\mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$).
- Il est pratique d'identifier un endomorphisme $\mathbf{A}$ de $\mathbb{R}^3$ à la matrice (notée encore $\mathbf{A}$) qui le représente dans la base canonique.

1.1.3 Notations simplifiée des dérivées partielles.

Pour simplifier les notations, l'usage consiste à noter les dérivées partielles de la manière suivante

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}.$$

De façon analogue, les dérivées secondes, troisième, ... se notent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{,ij}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} =: f_{,ijk}, \dots \text{ etc...}$$

1.1.4 Convention de sommation des indices répétés d'Einstein.

La convention de sommation des indices répétés consiste à déclarer que lorsque un indice muet est répété, il y a sommation sur cet indice. Par exemple si $\mathbf{S}$ est une matrice carrée de composante S_{ij} , alors sa trace $\text{tr } \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 S_{ii}$ est notée avec cette convention,

$$\text{tr } \mathbf{S} = S_{ii}.$$

Exercices.

Vérifier qu'en utilisant la convention de sommation des indices répétés on obtient les formules suivantes :

1. (a)

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i,$$

(b)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i,$$

(c)

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = A_{ij} u_j \mathbf{e}_i,$$

(d)

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj},$$

(e)

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}. \quad (1.1.1)$$

2. Montrer que pour toute matrice $n \times n$ $\mathbf{A}$ et tout $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{A}^t \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.1.2)$$

1.1.5 Produit tensoriel de deux vecteurs.

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit tensoriel de $\mathbf{u}$ par $\mathbf{v}$ la matrice notée $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ et définie par ses composantes

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j.$$

Par exemple, $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ est la matrice dont toutes les composantes sont nulles sauf celle située sur la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de $\mathbf{A}$, qui elle est égale à 1. Exemple : $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercices.

1. Montrer que toute matrice $\mathbf{A}$ vérifie (en utilisant la convention de sommation des indices répétés)

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

En déduire que la famille $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2}$ est une base de l'ensemble des matrices 3×3 .

2. Montrer que pour tous vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$,

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}. \quad (1.1.3)$$

En déduire que

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_i.$$

3. Montrer que pour tout vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{x}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} \otimes \mathbf{x}. \quad (1.1.4)$$

En utilisant (1.1.7), en déduire que

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \delta_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l.$$

4. Soit $\mathbf{A}$ une matrice 3×3 . Soit $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i. \quad (1.1.5)$$

Indication : tester $\mathbf{A} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i$ sur les vecteurs de la base $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$.

1.1.6 Le symbole de Kronecker δ_{ij} .

Le symbole de Kronecker δ_{ij} est défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Exercice.

Montrer les formules suivantes :

1.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.1.7)$$

2.

$$\delta_{ii} = 3 \quad (\text{avec la convention de sommation des indices répétés}).$$

3.

$$\forall i, k \in \{1, 2, 3\}, \quad \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{avec la convention de sommation des indices répétés}).$$

4. Pour toute matrice $\mathbf{A}$,

$$\forall i, k \in \{1, 2, 3\}, \quad \delta_{ij} A_{jk} = A_{ik} \quad (\text{avec la convention de sommation des indices répétés}). \quad (1.1.8)$$

5. On a

$$I_{ij} = \delta_{ij}.$$

1.1.7 Le symbole d'orientation ε_{ijk} .

Le symbole d'orientation ε_{ijk} est défini par

$$\varepsilon_{123} = 1,$$

et par le fait que si l'on permute deux indices, on change le signe de ε_{ijk} :

$$\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}. \quad (1.1.9)$$

On déduit

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1,$$

et

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \quad \text{si} \quad i = j \quad \text{ou} \quad j = k \quad \text{ou} \quad i = k. \quad (1.1.10)$$

On peut dire que

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{signature de la permutation} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résultat fondamental :

Théorème 1.1.1. *On a la formule suivante :*

$$\forall i, j, p, q \in \{1, 2, 3\}, \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \quad (1.1.11)$$

(avec la convention de sommation des indices répétés).

Démonstration. On distingue différents cas :

- Si $i = j$, alors, d'après (1.1.10), $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = 0$ et $\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = 0$, donc (1.1.11) est vrai.
- Si $p = q$: même conclusion
- Si $i \neq j$ et $p \neq q$, deux cas sont possibles : soit $\{i, j\} = \{p, q\}$, soit $\{i, j\} \neq \{p, q\}$.
 1. Si $\{i, j\} = \{p, q\}$, alors notant k_0 l'unique entier tel que $\{i, j, k_0\} = \{p, q, k_0\} = \{1, 2, 3\}$, on a

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \varepsilon_{ijk_0}\varepsilon_{pqk_0} \quad (\text{sans sommation}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = p \text{ et } j = q \\ -1 & \text{si } i = q \text{ et } j = p, \end{cases} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}.$$

donc (1.1.11) est vérifié.

2. si $\{i, j\} \neq \{p, q\}$, alors $\{i, j\} \cup \{p, q\} = \{1, 2, 3\}$, et soit $i \notin \{p, q\}$, soit $j \notin \{p, q\}$.
 - (a) Si $i \notin \{p, q\}$, $\delta_{ip} = \delta_{iq} = 0$, donc $\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = 0$. Par ailleurs, quel que soit $k \in \{1, 2, 3\} = \{i, j\} \cup \{p, q\}$, on a soit $k \in \{i, j\}$, alors $\varepsilon_{ijk} = 0$, soit $k \in \{p, q\}$, alors $\varepsilon_{pqk} = 0$. Dans les deux cas, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = 0$ (sans sommation). Donc (1.1.11) est vérifié.
 - (b) Si $j \notin \{p, q\}$: même conclusion.

□

Exercices.

1. Montrer que

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.1.12)$$

2. Montrer que

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pj k} = 2\delta_{ip} \quad (\text{avec la convention de sommation des indices répétés}). \quad (1.1.13)$$

Indication : utiliser (1.1.11).

3. Montrer que, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (\text{avec la convention de sommation des indices répétés}). \quad (1.1.14)$$

Indication : utiliser (1.1.13).

4. Montrer que

$$M_{ij} = M_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \implies \varepsilon_{ijk}M_{jk} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.1.15)$$

1.2 Produit vectoriel et produit mixte.

1.2.1 Produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est défini par

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3.$$

Le nombre $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|$ représente la surface du parallélogramme de cotés $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Il est donné par

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\sin(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})|.$$

Exercice.

1. Vérifier la formule suivante :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i \quad (\text{avec la convention de sommation des indices répétés}). \quad (1.2.1)$$

2. Montrer la formule du double produit vectoriel :

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}. \quad (1.2.2)$$

Indication : utiliser les formules (1.1.11) et (1.2.1).

1.2.2 Produit mixte.

Le produit mixte de trois vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ est le scalaire défini par

$$\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3).$$

La valeur absolue du produit mixte $\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3)$ est égale au volume du parallélépipède dont trois arêtes issues d'un même sommet sont égales à $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Exercices.

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ trois vecteurs.

1. Montrer que (avec la convention de sommation des indices répétés)

$$\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u}_1)_i (\mathbf{u}_2)_j (\mathbf{u}_3)_k. \quad (1.2.3)$$

2. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) \\ &= -\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1), \end{aligned}$$

3. En déduire que pour tout $p, q, r \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mathbf{u}_p \cdot (\mathbf{u}_q \wedge \mathbf{u}_r) = \varepsilon_{pqr} \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3), \quad (1.2.4)$$

puis que (avec la convention de sommation des indices répétés)

$$\varepsilon_{pqr} \mathbf{u}_p \cdot (\mathbf{u}_q \wedge \mathbf{u}_r) = 6 \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3),$$

(Indication : utiliser (1.1.14)),

enfin que

$$\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) = \frac{1}{6} \varepsilon_{pqr} \mathbf{u}_p \cdot (\mathbf{u}_q \wedge \mathbf{u}_r). \quad (1.2.5)$$

1.2.3 Application au calcul du déterminant d'une matrice 3×3 .

Soit $\mathbf{A}$ une matrice 3×3 et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ses vecteurs colonne, définis par :

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

On a donc

$$A_{ij} = (\mathbf{u}_j)_i. \quad (1.2.7)$$

Définition 1.2.1. On appelle déterminant de $\mathbf{A}$ le scalaire $\det \mathbf{A}$ défini par

$$\det \mathbf{A} = \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3). \quad (1.2.8)$$

Théorème 1.2.1. Avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}. \quad (1.2.9)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3) \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_{pqr} \mathbf{u}_p \cdot (\mathbf{u}_q \wedge \mathbf{u}_r) && \text{d'après (1.2.5)} \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_{pqr} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{u}_p)_i (\mathbf{u}_q)_j (\mathbf{u}_r)_k \\ &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr} && \text{d'après (1.2.7).} \end{aligned}$$

□

Exercices

1. Montrer que

$$\det \mathbf{A}^t = \det \mathbf{A}. \quad (1.2.10)$$

Indication : utiliser (1.2.9).

2. Montrer que (avec la convention de sommation des indices répétés)

$$\varepsilon_{pqr} \det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr}. \quad (1.2.11)$$

Indication : utiliser (1.2.4) et (1.2.8).

3. Montrer que (avec la convention de sommation des indices répétés)

$$\varepsilon_{pqr} \det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{pi} A_{qj} A_{rk}. \quad (1.2.12)$$

Indication : utiliser (1.2.10) et (1.2.11).

4. Montrer que

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

Indication : utiliser (1.2.9), (1.2.11) et (1.2.12).

5. Montrer que

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v} \wedge \mathbf{A}\mathbf{w}) = (\det \mathbf{A})(\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})). \quad (1.2.13)$$

Indication : utiliser (1.2.3) et (1.2.12).

Remarque 1.2.1. La formule (1.2.13) dit que le volume du parallélépipède de cotés déterminés par les vecteurs $\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{w}$ est le produit par $|\det \mathbf{A}|$ de celui de cotés déterminés $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Cette formule est à la base de la formule de changement de variables (2.4.2).

1.3 Matrices symétriques

Definition 1.3.1. Une matrice $n \times n$ $\mathbf{S}$ est dite *symétrique* si

$$\mathbf{S}^t = \mathbf{S}.$$

Un endomorphisme $\mathbf{S}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *symétrique* si et seulement si

$$\mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.1)$$

Remarque 1.3.1. Soit $\mathbf{S}$ une matrice $n \times n$. Il est commode de noter encore $\mathbf{S}$ l'endomorphisme qu'elle représente dans la base canonique. Alors $\mathbf{S}$ est une matrice symétrique si et seulement si $\mathbf{S}$ est un endomorphisme symétrique. Autrement dit,

$$\mathbf{S}^t = \mathbf{S} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.2)$$

Indication : $\Rightarrow$ résulte de (1.1.2). $\Leftarrow$: choisir $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Résultat fondamental.

Théorème 1.3.1. Une matrice réelle $n \times n$ $\mathbf{S}$ est symétrique si et seulement si elle admet une base orthonormée de vecteurs propres. De manière équivalente, un endomorphisme $\mathbf{S}$ d'un espace euclidien de dimension n est symétrique si et seulement si il admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Démonstration. Appelons $\mathcal{H}_n$ cette propriété. $\mathcal{H}_1$ est vraie. Supposons $\mathcal{H}_n$ et soit $\mathbf{S}$ une matrice symétrique $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients réels. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine complexe du polynôme caractéristique de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ un vecteur propre associé à λ (i.e., $\mathbf{S}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$). On a, avec la règle de sommation de 1 à $n+1$ des indices répétés,

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \cdot \lambda\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{u}}_i u_i = \lambda |\mathbf{u}|^2.$$

D'autre part, puisque $\mathbf{S}$ est symétrique et $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$, on a d'après (1.1.2)

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{S}^t \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = \overline{(\lambda \mathbf{u})} \cdot \mathbf{u} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = \bar{\lambda} |\mathbf{u}|^2,$$

donc, puisque $\mathbf{u} \neq 0$ (car c'est un vecteur propre), $\bar{\lambda} = \lambda$. On déduit que $\lambda \in \mathbb{R}$ (et donc que toutes les racines du polynôme caractéristique de $\mathbf{S}$ sont réelles).

Donc il existe un vecteur propre normé $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ de $\mathbf{S}$ associé à λ . Notons H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n défini par

$$H = \{\mathbf{u}_1\}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

On a

$$\forall \mathbf{v} \in H, \quad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{S}^t \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = 0.$$

On déduit

$$\mathbf{S}H \subset H.$$

La restriction de l'endomorphisme $\mathbf{S}$ à H , noté encore $\mathbf{S}$, est donc un endomorphisme de H . Il est clair que cette restriction est symétrique (i.e. que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in H$). L'espace H étant de dimension n , l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ s'applique : il existe une base orthonormée $(\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1})$ de H de vecteurs propres de la restriction de $\mathbf{S}$ à H . On déduit que le système $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$ de vecteurs propres de $\mathbf{S}$. □

Exercice

Soit $\mathbf{S}$ une matrice symétrique et soit $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n)$ une base orthonormée formée de vecteurs propres de $\mathbf{S}$ associées aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Montrer que

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{s}_k \otimes \mathbf{s}_k. \quad (1.3.3)$$

Indication : tester $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{s}_k \otimes \mathbf{s}_k$ sur les vecteurs de la base $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n)$.

1.4 Matrices orthogonales

Soit $\mathbf{O}$ une matrice 3×3 et $\mathbf{u}_1 = \mathbf{O}\mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{O}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{O}\mathbf{e}_3$ ses vecteurs colonne, définis par :

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} O_{11} \\ O_{21} \\ O_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} O_{12} \\ O_{22} \\ O_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix} O_{13} \\ O_{23} \\ O_{33} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que

$$(\mathbf{O}^t \mathbf{O})_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}.$$

Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, $(\mathbf{O}^t \mathbf{O})_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, c'est à dire

$$\mathbf{O}^t \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

On dit alors que $\mathbf{O}$ est une matrice orthogonale. L'application linéaire représentée par $\mathbf{O}$, qui transforme toute base orthonormée en une base orthonormée, est appelée une isométrie linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.4.1. Une matrice 3×3 $\mathbf{O}$ est dite orthogonale si et seulement si

$$\mathbf{O}^t \mathbf{O} = \mathbf{I}.$$

Le théorème de décomposition polaire (théorème 1.5.1) dit que toute matrice 3×3 est le produit d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale.

1.5 Théorème de décomposition polaire d'une matrice $n \times n$

Le but de cet exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 (théorème de décomposition polaire). *Pour toute matrice $n \times n$ $\mathbf{A}$, il existe des matrices symétriques $\mathbf{S}$ et $\tilde{\mathbf{S}}$, et une matrice orthogonale $\mathbf{Q}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{Q}$. Autrement dit, il existe des matrices $n \times n$ $\mathbf{S}$, $\tilde{\mathbf{S}}$ et $\mathbf{Q}$ telles que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{S}^t = \mathbf{S}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^t = \tilde{\mathbf{S}}, \quad \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (1.5.1)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer ce théorème lorsque $\mathbf{A}$ est inversible. La densité des matrices inversibles dans l'ensemble des matrices permet ensuite de conclure. On fixe donc une matrice inversible $\mathbf{A}$. On pose

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \mathbf{A}. \quad (1.5.2)$$

1. Vérifier que $\mathbf{C}$ est symétrique, que $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})^2 > 0$, que les valeurs propres de $\mathbf{C}$ sont non nulles, et

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{C}\mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5.3)$$

2. Montrer que pour toute base orthonormée $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et pour toute matrice $\mathbf{B}$, on a

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{B}\mathbf{c}_k) \otimes \mathbf{c}_k \quad (1.5.4)$$

3. Soit $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ des vecteurs propres de $\mathbf{C}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, c'est à dire $\mathbf{C}\mathbf{c}_k = \lambda_k \mathbf{c}_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (voir Théorème 1.3.1). Montrer que

$$\lambda_k |\mathbf{c}_k|^2 = \mathbf{c}_k \cdot (\mathbf{C}\mathbf{c}_k) = (\mathbf{A}\mathbf{c}_k) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{c}_k) = |\mathbf{A}\mathbf{c}_k|^2 \quad (\text{sans sommation}) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

En déduire que les valeurs propres de $\mathbf{C}$ sont strictement positives.

4. On pose

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{A}\mathbf{c}_k \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Montrer que

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \lambda_i \delta_{ij} \quad (\text{sans sommation}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

En déduire que $(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\mathbf{d}_1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\mathbf{d}_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\mathbf{d}_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

5. On pose

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \mathbf{c}_k \otimes \mathbf{c}_k, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{d}_k \otimes \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{Q} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{c}_k. \quad (1.5.5)$$

Montrer que $\mathbf{S}$ et $\tilde{\mathbf{S}}$ sont symétriques, que $\mathbf{Q}$ est orthogonale, et que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{Q}.$$

□

1.6 Matrice des cofacteurs (comatrice)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice 3×3 de vecteurs colonne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ (voir (1.2.6)). On appelle matrice des cofacteurs (ou comatrice) de $\mathbf{A}$, la matrice 3×3 , notée $\mathbf{CofA}$, dont les vecteurs colonne sont $\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{CofA})_{11} \\ (\mathbf{CofA})_{21} \\ (\mathbf{CofA})_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3, \quad \begin{pmatrix} (\mathbf{CofA})_{12} \\ (\mathbf{CofA})_{22} \\ (\mathbf{CofA})_{32} \end{pmatrix} = \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1, \quad \begin{pmatrix} (\mathbf{CofA})_{13} \\ (\mathbf{CofA})_{23} \\ (\mathbf{CofA})_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2. \quad (1.6.1)$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{1pq} \mathbf{u}_p \wedge \mathbf{u}_q, \\ \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{2pq} \mathbf{u}_p \wedge \mathbf{u}_q, \\ \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_{3pq} \mathbf{u}_p \wedge \mathbf{u}_q. \end{aligned}$$

2. En déduire que

$$(\mathbf{CofA})_{ij} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{jpk} \mathbf{u}_p \wedge \mathbf{u}_k \right)_i,$$

puis que

$$\boxed{(\mathbf{CofA})_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jpq} A_{mp} A_{nq}.} \quad (1.6.2)$$

3. Montrer que

$$\boxed{(\mathbf{CofA})^t = (\mathbf{CofA}^t)}$$

4. Montrer que

$$\mathbf{A}(\mathbf{CofA}^t) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}, \quad (1.6.3)$$

En déduire que si $\mathbf{A}$ est inversible,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{CofA})^t.$$

5. Montrer que

$$\mathbf{Cof}(AB) = \mathbf{Cof}A \mathbf{Cof}B.$$

6. En déduire que si $\mathbf{A}$ est inversible, $\mathbf{Cof}A \mathbf{Cof}(A^{-1}) = \mathbf{I}$, donc $\mathbf{Cof}(A)$ est inversible et

$$(\mathbf{Cof}A)^{-1} = \mathbf{Cof}(A^{-1}).$$

7. Montrer que

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}\mathbf{v} = (\mathbf{Cof}A)(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}). \quad (1.6.4)$$

8. Montrer que

$$\operatorname{div}(\mathbf{Cof}(\nabla \mathbf{u})) = 0.$$

Indication : utiliser (1.6.2).

1.7 Opérateurs différentiels courants.

Les fonctions et champs vectoriels ou matriciels considérés dans ce qui suit sont supposés indéfiniment dérivables.

1.7.1 Laplacien d'un champ scalaire

Le Laplacien d'un champ scalaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ scalaire $\Delta f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Delta f := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 f_{,ii},$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\Delta f := f_{,ii}.$$

1.7.2 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ scalaire $\operatorname{div} \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\operatorname{div} \mathbf{u} := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 u_{i,i},$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = u_{i,i}.$$

1.7.3 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient d'un champ scalaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ vectoriel $\nabla f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\nabla f := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 f_{,i} \mathbf{e}_i,$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\nabla f = f_{,i} \mathbf{e}_i.$$

Cela s'écrit encore

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (1.7.1)$$

1.7.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

La rotationnel d'un champ vectoriel $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ vectoriel $\mathbf{rot} \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3.$$

On peut écrire, formellement,

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \nabla \wedge \mathbf{u}.$$

Remarque 1.7.1. On déduit de l'exercice 1.2.1 que

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \mathbf{e}_i.$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \mathbf{e}_i.$$

1.7.5 Gradient d'un champ vectoriel

Le gradient d'un champ vectoriel $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ matriciel $\nabla \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 3}$ défini par

$$\nabla \mathbf{u} := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\nabla \mathbf{u} = u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Cela qui s'écrit encore

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{matrice jacobienne de } \mathbf{u}). \quad (1.7.2)$$

Exercice.

Soit un champ vectoriel $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathbf{rot} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -(\nabla \mathbf{u} - \nabla^t \mathbf{u})_{23} \\ (\nabla \mathbf{u} - \nabla^t \mathbf{u})_{13} \\ -(\nabla \mathbf{u} - \nabla^t \mathbf{u})_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.7.3)$$

1.7.6 Divergence d'un champ matriciel

La divergence d'un champ matriciel $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 3}$ est le champ vectoriel $\mathbf{div} \mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathbf{div} \mathbf{A} := \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij,j} \mathbf{e}_i,$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = A_{ij,j} \mathbf{e}_i,$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

La i^{eme} composante de $\mathbf{div} \mathbf{A}$ est égale à la divergence de la i^{eme} ligne de $\mathbf{A}$.

1.7.7 Laplacien d'un champ vectoriel

Le Laplacien d'un champ vectoriel $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ vectoriel $\Delta \mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \Delta u_i \mathbf{e}_i.$$

soit, avec la convention de sommation des indices répétés,

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta u_i \mathbf{e}_i = u_{i,jj} \mathbf{e}_i.$$

Les composantes du vecteur $\Delta \mathbf{u}$ sont les laplaciens des composantes de $\mathbf{u}$.

1.7.8 Exercices.

1. Montrer que

$$\mathbf{rot} \nabla f = 0. \quad (1.7.4)$$

Remarque 1.7.2. Le lemme de Poincaré (Théorème 1.7.1) dit que

$$\mathbf{rot} \mathbf{a} = \vec{0} \iff \exists f, \quad \mathbf{a} = \nabla f.$$

2. Montrer que

$$\mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0. \quad (1.7.5)$$

Remarque 1.7.3. Une variante du lemme de Poincaré (Théorème 1.7.2) dit que

$$\mathbf{div} \mathbf{a} = \vec{0} \iff \exists \mathbf{u} \quad \mathbf{a} = \mathbf{rot} \mathbf{u}$$

3. Montrer que

$$(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \frac{1}{2} \nabla (|\mathbf{u}|^2).$$

4. Montrer que

$$\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \nabla \mathbf{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}. \quad (1.7.6)$$

1.7.9 Exercices supplémentaires.

1. Montrer que

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

2. Montrer que

$$\nabla f \wedge \nabla g = \text{rot}(f\nabla g) = -\text{rot}(g\nabla f).$$

(Utiliser (1.7.4)).

3. Montrer que

$$\text{div}(f\mathbf{u}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{u} + f \text{div} \mathbf{u}.$$

4. Montrer que

$$\text{rot}(f\mathbf{u}) = f\text{rot} \mathbf{u} + \nabla f \wedge \mathbf{u}.$$

5. Montrer que

$$\text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\text{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\text{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}.$$

6. Montrer que

$$[\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})]_i = (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j)_{,j} - (\mathbf{u}_j \mathbf{v}_i)_{,j}.$$

En déduire que

$$\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\text{div} \mathbf{v})\mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v} - (\text{div} \mathbf{u})\mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})\mathbf{u}.$$

7. Montrer que

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge (\text{rot} \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\text{rot} \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v}$$

8. Soit $\mathbf{O}$ une matrice 3×3 orthogonale (i.e. vérifiant $\mathbf{O}^t \mathbf{O} = I$). Montrer que

$$\Delta(u(\mathbf{O}x)) = (\Delta u)(\mathbf{O}x).$$

En particulier,

$$\Delta u = 0 \quad \text{et} \quad v(x) := u(\mathbf{O}x) \quad \implies \quad \Delta v = 0.$$

1.7.10 Dérivées partielles d'application composées de plusieurs variables

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiables. Les dérivées partielles de $f \circ \mathbf{g}(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ sont données, avec la convention de sommation des indices répétés, par

$$(f(g_1(x), g_2(x), g_3(x)))_{,j} = (f_{,k}(g_1(x), g_2(x), g_3(x)))g_{k,j}(x),$$

que l'on écrit

$$(f \circ \mathbf{g})_{,j} = (f_{,k} \circ \mathbf{g})g_{k,j}, \tag{1.7.7}$$

ou, d'après (1.7.1),

$$\nabla(f \circ \mathbf{g}) = (f_{,k} \circ \mathbf{g})g_{k,j}\mathbf{e}_j.$$

2. On suppose maintenant que $f : (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{g} : (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{g}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ sont des fonctions différentiables de 4 variables x_1, x_2, x_3, t , la variable t représentant le temps. La dérivée partielle par rapport au temps de $f(\mathbf{g}(x, t), t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f(g_1(x, t), g_2(x, t), g_3(x, t)), t) \\ = f_{,k}(g_1(x, t), g_2(x, t), g_3(x, t), t) \frac{\partial g_k(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}(g_1(x, t), g_2(x, t), g_3(x, t), t), \end{aligned}$$

soit, en abrégé, notant $h_{,t} = \frac{\partial h}{\partial t}$ la dérivée partielle par rapport au temps d'une fonction h ,

$$(f(\mathbf{g}, t))_{,t} = f_{,k}(\mathbf{g}, t)(g_k)_{,t} + f_{,t}(\mathbf{g}, t) \quad (1.7.8)$$

1.7.11 Application : dérivée particulaire.

Soit un milieu matériel continu (liquide, solide ou gaz) et soit $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$ la vitesse de la particule de ce milieu occupant la position $\mathbf{x}(t)$ à l'instant t . Son accélération $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}(t), t)$ est donnée par $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}(t), t) = \gamma_i(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{e}_i$, avec

$$\begin{aligned} \gamma_i(\mathbf{x}(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t} v_i(\mathbf{x}(t), t) \\ &= v_{i,k}(\mathbf{x}, t)(x_k)_{,t} + v_{i,t}(\mathbf{x}(t), t) \quad \text{formule (1.7.8) avec } \mathbf{g} = \mathbf{x}(t) \text{ et } f = v_i \\ &= v_{i,k}(\mathbf{x}, t)v_k(\mathbf{x}, t) + v_{i,t}(\mathbf{x}(t), t), \quad \text{car } (x_k(t))_{,t} = v_k(\mathbf{x}(t), t). \end{aligned}$$

En abrégé,

$$\boldsymbol{\gamma} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

On dit que $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t)$ est la "dérivée particulaire" de la vitesse (abréviation de "dérivée par rapport au temps de la vitesse d'une particule de position $\mathbf{x}(t)$ que l'on suit dans son mouvement"). La dérivée particulaire de la vitesse se note

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Notez bien la différence graphique entre $\frac{d}{dt}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$. Si $k(x, t)$ est une autre grandeur physique attachée au milieu matériel (température, masse volumique, etc...), la dérivée particulaire de k est donnée par

$$\frac{d}{dt} k = \nabla k \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial k}{\partial t}.$$

Si $\Omega(t)$ est le volume occupé à l'instant t par un milieu matériel continu, on note de même

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} k(x, t) d\mathcal{H}^3(x)$$

la dérivée par rapport au temps de l'intégrale $\int_{\Omega(t)} k(x, t) d\mathcal{H}^3(x)$ lorsque l'on suit $\Omega(t)$ dans son mouvement. Le calcul de cette dérivée (section 2.4) est difficile. Il est essentiel dans ce cours.

1.7.12 Lemme de Poincaré et variante.

Le théorème suivant permet en particulier d'établir, dans ce cours, les "équations de compatibilité" et les "équations de Beltrami" (Chapitre 9) qui servent à résoudre des problèmes d'élasticité.

Théorème 1.7.1 (Lemme de Poincaré). *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. On a l'équivalence*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \in C^1(U, \mathbb{R}^n), \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \\ \iff \\ \exists f \in C^2(U), \quad \mathbf{a} = \nabla f. \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

De plus,

$$f(x) = \int_{t=0}^1 x_i a_i(tx) dt.$$

Dans le cas ou $n = 3$, (1.7.9) s'énonce

$$[\mathbf{a} \in C^1(U, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{rot} \mathbf{a} = 0] \iff [\exists f \in C^2(U), \quad \mathbf{a} = \nabla f]. \quad (1.7.10)$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Si $\mathbf{a} = \nabla \varphi$, d'après le théorème de Schwarz, $a_{i,j} - a_{j,i} = (\varphi_{,i})_{,j} - (\varphi_{,j})_{,i} = 0$.

$\Rightarrow$

Soit $\mathbf{a} \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2. \quad (1.7.11)$$

On pose

$$\varphi(t, x) := x_i a_i(tx). \quad (1.7.12)$$

On a, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, (avec la convention de sommation de 1 à n des indices répétés)

$$\begin{aligned} (\varphi(t, x))_{,j} &= (x_i a_i(tx))_{,j} \\ &= (x_i)_{,j} a_i(tx) + x_i (a_i(tx))_{,j} \\ &= \delta_{ij} a_i(tx) + x_i (a_{i,k}(tx)) (tx_k)_{,j} \quad \text{cf (1.7.7)} \\ &= \delta_{ij} a_i(tx) + x_i a_{i,k}(tx) t \delta_{kj} \\ &= a_j(tx) + tx_i a_{i,j}(tx) \\ &= a_j(tx) + tx_i a_{j,i}(tx) \quad \text{d'après (1.7.11)}. \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (ta_j(tx)) &= a_j(tx) + t \frac{\partial}{\partial t} (a_j(tx)) \\ &= a_j(tx) + ta_{j,k}(tx) \frac{\partial}{\partial t} (tx_k) \quad \text{cf (1.7.8)} \\ &= a_j(tx) + tx_k a_{j,k}(tx) \\ &= a_j(tx) + tx_i a_{j,i}(tx). \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

Donc

$$(\varphi(t, x))_{,j} = \frac{\partial}{\partial t} (ta_j(tx)). \quad (1.7.15)$$

Posant

$$f(x) := \int_{t=0}^1 \varphi(t, x) dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
(f(x))_{,j} &= \left(\int_{t=0}^1 \varphi(t, x) dt \right)_{,j} = \int_{t=0}^1 (\varphi(t, x))_{,j} dt \\
&= \int_{t=0}^1 \frac{\partial}{\partial t} (ta_j(tx)) dt && \text{d'après (1.7.15),} \\
&= [ta_j(tx)]_{t=0}^1 = a_j(x),
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{a} = \nabla f.$$

□

1.7.13 Version bidimensionnelle du Lemme de Poincaré .

La version suivante du lemme de Poincaré permet en particulier (voir Section 4.2) de caractériser les contraintes dans un solide élastique lorsque celles-ci ne dépendent que de deux variables (x_1, x_2) (contraintes planes).

Corollaire 1.7.1. *Soit V un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. On a*

$$[\mathbf{b} \in C^1(V; \mathbb{R}^2), \quad b_{1,1} + b_{2,2} = 0] \iff \exists f(x_1, x_2) \in C^2(V), \quad \begin{cases} b_1 = f_{,2} \\ b_2 = -f_{,1} \end{cases} \quad (1.7.16)$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Résulte du théorème de Schwarz.

$\Rightarrow$ Posons $U = V \times \mathbb{R}$. Le champ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}$ donc, d'après (1.7.9), il existe $f \in C^2(U)$ telle que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{pmatrix}.$$

Donc $f_{,3} = 0$ (i. e. $f = f(x_1, x_2)$), $b_1 = a_2 = f_{,2}$, et $b_2 = -a_1 = -f_{,1}$.

□

1.7.14 * Variante du Lemme de Poincaré.

Le lemme suivant concerne les champs vectoriels $\mathbf{v}$ de divergence nulle. La réunion des courbes tangentes à un tel champ $\mathbf{v}$ en tout point et passant par un contour donné a une forme tubulaire. Pour cette raison, un champ vérifiant $\text{div } \mathbf{v} = 0$ est appelé un champ solénoïdal, du grec $\sigma\omega\lambda\eta\nu\omicron\epsilon\iota\delta\epsilon\varsigma$ signifiant "de forme tubulaire".

Théorème 1.7.2. *Soit U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$. On a l'équivalence*

$$[\mathbf{a} \in C^1(U; \mathbb{R}^3), \quad \text{div } \mathbf{a} = 0] \iff [\exists \mathbf{u} \in C^2(U; \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{u}.] \quad (1.7.17)$$

Démonstration. $\Leftarrow$: voir (1.7.5).

$\Rightarrow$: la preuve est assez simple, mais elle utilise les formes différentielles qui sont hors programme. Voir [7]. □

1.8 Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes est l'analogie tri-dimensionnel de la formule fondamentale de l'analyse : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$. La formule énoncée dans ce théorème est encore plus fondamentale. En mécanique, elle est omniprésente. Dans la suite, on note $d\mathcal{H}^2$ l'élément de surface et $d\mathcal{H}^3$ l'élément de volume.

Théorème 1.8.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ régulière (de classe C^1) et soit $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Alors

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} f n_i d\mathcal{H}^2, \quad (1.8.1)$$

soit, avec les notations simplifiées,

$$\int_{\Omega} f_{,i} d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} f n_i d\mathcal{H}^2.$$

où $n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{n}$ désigne le vecteur unitaire orthogonal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω (normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$).

Démonstration. (Idée de la démonstration). La formule (1.8.1) se généralise à $\mathbb{R}^n$ pour tout entier $n \geq 1$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{H}^n = \int_{\partial\Omega} f n_i d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (1.8.2)$$

On donne une idée de la démonstration pour $n = 2$ et $i = 1$ dans le cas d'un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^2$.

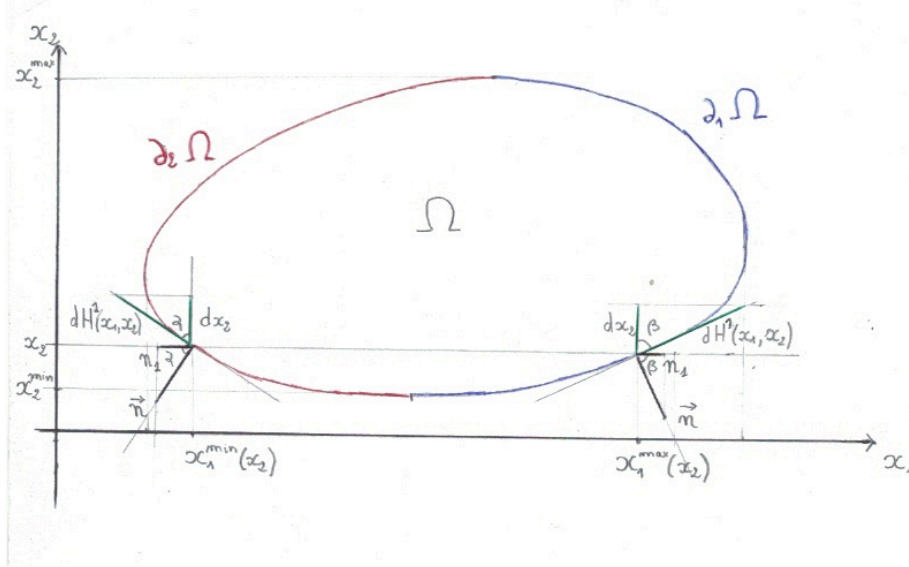


FIGURE 1.1 –

D'après le théorème de Fubini, les notations étant indiquées sur la figure,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_1} d\mathcal{H}^2 &= \int_{x_2=x_2^{\min}}^{x_2=x_2^{\max}} dx_2 \left(\int_{x_1=x_1^{\min}(x_2)}^{x_1=x_1^{\max}(x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right) \\ &= \int_{x_2=x_2^{\min}}^{x_2=x_2^{\max}} dx_2 [f(x_1, x_2)]_{x_1=x_1^{\min}(x_2)}^{x_1=x_1^{\max}(x_2)} \\ &= \int_{x_2=x_2^{\min}}^{x_2=x_2^{\max}} f(x_1^{\max}(x_2), x_2) dx_2 - \int_{x_2=x_2^{\min}}^{x_2=x_2^{\max}} f(x_1^{\min}(x_2), x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

La variation infinitésimale dx_2 apparaissant dans le terme $\int_{x_2=x_2^{min}}^{x_2=x_2^{max}} f(x_1^{max}(x_2), x_2) dx_2$ est représentée sur la figure par le trait vertical vert à droite. Elle correspond à un déplacement infinitésimal $d\mathcal{H}^1(x_1, x_2)$ le long de la frontière $\partial\Omega$ de Ω , représentée par le trait oblique vert. Les segments dx_2 et $d\mathcal{H}^1(x_1, x_2)$ définissent un triangle rectangle. L'angle entre dx_2 et $d\mathcal{H}^1(x_1, x_2)$, noté β , vérifie $\cos \beta = \frac{dx_2}{d\mathcal{H}^1(x_1, x_2)}$. Cet angle β est aussi l'angle entre la normale extérieure $\mathbf{n}$ et le vecteur $\mathbf{x}_1$, donc (voir figure) $\cos \beta = \frac{|\mathbf{n}_1|}{\|\mathbf{n}\|} = n_1$ car $\|\mathbf{n}\| = 1$ et $n_1 \geq 0$. On déduit $\frac{dx_2}{d\mathcal{H}^1(x_1, x_2)} = n_1$, soit

$$dx_2 = n_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2) \quad \text{au point } (x_1^{max}(x_2), x_2).$$

Ainsi,

$$\int_{x_2=x_2^{min}}^{x_2=x_2^{max}} f(x_1^{max}(x_2), x_2) dx_2 = \int_{(x_1, x_2) \in \partial_1 \Omega} f(x_1, x_2) n_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2).$$

Répétant ce raisonnement en $(x_1^{min}(x_2), x_2)$, remarquant qu'en ce point $n_1 \leq 0$ et donc

$$dx_2 = -n_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2) \quad \text{au point } (x_1^{min}(x_2), x_2),$$

on obtient

$$\int_{x_2=x_2^{min}}^{x_2=x_2^{max}} f(x_1^{min}(x_2), x_2) dx_2 = - \int_{(x_1, x_2) \in \partial_2 \Omega} f(x_1, x_2) n_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2).$$

Renenant à (1.8.3), on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathcal{H}^2 &= \int_{x_2=x_2^{min}}^{x_2=x_2^{max}} f(x_1^{max}(x_2), x_2) dx_2 - \int_{x_2=x_2^{min}}^{x_2=x_2^{max}} f(x_1^{min}(x_2), x_2) dx_2 \\ &= \int_{(x_1, x_2) \in \partial_1 \Omega} f(x_1, x_2) n_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2) + \int_{(x_1, x_2) \in \partial_2 \Omega} f(x_1, x_2) n_1 d\mathcal{H}^1(x_1, x_2) \\ &= \int_{\partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega} f n_1 d\mathcal{H}^1 \\ &= \int_{\partial \Omega} f n_1 d\mathcal{H}^1. \end{aligned}$$

□

1.8.1 Applications

En combinant le calcul indicial et la formule de Stokes, on obtient une variété de nouvelles formules. Par exemple, la formule

$$\int_{\Omega} \nabla f d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial \Omega} f \mathbf{n} d\mathcal{H}^2,$$

s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla f d\mathcal{H}^3 &= \int_{\Omega} f_{,i} \mathbf{e}_i d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\Omega} f_{,i} d\mathcal{H}^3 \mathbf{e}_i \\ &= \int_{\partial \Omega} f n_i d\mathcal{H}^3 \mathbf{e}_i \quad \text{d'après (1.8.1)} \\ &= \int_{\partial \Omega} f n_i \mathbf{e}_i d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\partial \Omega} f \mathbf{n} d\mathcal{H}^3. \end{aligned}$$

Exercices

En combinant le calcul indicial et la formule de Stokes, montrer les formules suivantes :

1.

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} d\mathcal{H}^2.$$

2.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2. \quad (1.8.4)$$

3.

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} d\mathcal{H}^2, \quad ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_{ij} := u_i n_j).$$

4.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} d\mathcal{H}^2. \quad (1.8.5)$$

5.

$$\int_{\Omega} f \triangle g d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} d\mathcal{H}^2 - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g d\mathcal{H}^3, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial n} := \nabla g \cdot \mathbf{n} \right)$$

6.

$$\int_{\Omega} (f \triangle g - g \triangle f) d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\mathcal{H}^2 \quad (\text{formule de Green}).$$

Chapitre 2

Cinématique des milieux continus

On désigne par milieu continu tout liquide, gaz ou solide, déformable ou non, quand on le considère d'un point de vue macroscopique, par opposition à une description corpusculaire.

2.1 Définition du mouvement d'un milieu continu.

On considère un milieu continu en mouvement, qui occupe à chaque instant t une région $\Omega(t)$ de l'espace. On se place dans le cadre de la mécanique classique, non relativiste. Le mouvement du milieu continu est défini complètement si, pour chaque instant t et pour chaque point matériel $M(t)$ du milieu (se déplaçant au cours du temps) on connaît l'application qui à la position X du point à l'instant 0 associe

sa position x à l'instant t . Les coordonnées $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ point matériel à l'instant $t = 0$ sont appelées ses

coordonnées de Lagrange, et les coordonnées $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ point matériel à l'instant t sont appelées ses

coordonnées d'Euler. Dans la suite, on notera

$$\mathbf{f} : (X, t) \in \Omega(0) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{f}(X, t) \in \Omega(t) \quad (2.1.1)$$

l'application qui donne les coordonnées d'Euler $x = \mathbf{f}(X, t)$ en fonction du temps t et des coordonnées de Lagrange X . On supposera dans la suite que $\mathbf{f}$ est indéfiniment différentiable, et que pour tout t fixé, l'application $X \in \Omega(0) \rightarrow \mathbf{f}(X, t)$ est une bijection de $\Omega(0)$ sur $\Omega(t)$, dont la bijection réciproque sera notée $\mathbf{g}(x, t)$. L'application $\mathbf{g}$ est donc définie par

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(X, t), t) = X \quad \forall X \in \Omega(0). \quad (2.1.2)$$

On supposera aussi que $\mathbf{g}$ est indéfiniment différentiable.

Definition 2.1.1.

1. On appelle *trajectoire* d'un point matériel l'ensemble des positions de l'espace qu'il occupe au cours du temps. Si X représente les coordonnées de Lagrange du point matériel, sa trajectoire est la courbe de l'espace donnée par

$$\text{Traj}(X) := \{\mathbf{f}(X, t), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Soit P un point fixe de l'espace et soit t_1 un réel fixé. On appelle *ligne d'émission* de P à l'instant t_1 l'ensemble des positions à l'instant t_1 de tous les points matériels qui sont passé par la position P à un instant antérieur. Si x_P représente les coordonnées de P , la ligne d'émission de P à l'instant t_1 est la courbe de l'espace donnée par

$$\text{Emission}(P, t_1) := \{\mathbf{f}(\mathbf{g}(x_P, t), t_1), \quad t \in [0, t_1]\}.$$

3. On appelle ligne de courant à l'instant t_1 toute courbe incluse dans $\Omega(t_1)$ et telle que la vitesse à l'instant t de tout point matériel situé sur la courbe soit tangente à la courbe.

2.2 Vitesse.

La vitesse à l'instant t d'un point matériel $M(t)$ occupant la position X à l'instant 0 est donnée par $\mathbf{v}(M(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(X, t)$. On note

$$\underline{\mathbf{v}} : (X, t) \in \Omega(0) \times \mathbb{R} \rightarrow \underline{\mathbf{v}}(X, t) := \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(X, t), \quad (2.2.1)$$

l'application qui associe au couple (X, t) la vitesse à l'instant t du point matériel de coordonnées lagrangiennes X .

On note

$$\mathbf{v} : (x, t) \in \Omega(t) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{v}(x, t) := \underline{\mathbf{v}}(g(x, t), t),$$

l'application qui associe au couple (x, t) la vitesse à l'instant t du point matériel de coordonnées eulériennes x . La description du champ des vitesses par $\underline{\mathbf{v}}$ est appelée la description lagrangienne du mouvement et la description du champ des vitesses par $\mathbf{v}$ est appelée la description eulérienne du mouvement.

2.3 Accélération. Dérivées particulières.

Nous reprenons plus en détail la notion introduite en section 1.7.11. L'accélération à l'instant t d'un point matériel $M(t)$ occupant la position X à l'instant 0 est donnée par $\boldsymbol{\gamma}(M(t)) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}(X, t)$. On définit de manière analogue les descriptions lagrangiennes $\underline{\boldsymbol{\gamma}}(X, t)$ et eulériennes $\boldsymbol{\gamma}(x, t)$ de l'accélération :

— $\underline{\boldsymbol{\gamma}}(X, t)$ est l'accélération à l'instant t du point matériel de coordonnées de Lagrange X .

— $\boldsymbol{\gamma}(x, t)$ est l'accélération à l'instant t du point matériel de coordonnées d'Euler x à l'instant t .

On a

$$\boldsymbol{\gamma}(x, t) = \underline{\boldsymbol{\gamma}}(g(x, t), t),$$

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}}(X, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{f}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{v}}(X, t). \quad (2.3.1)$$

En description eulérienne, l'accélération $\boldsymbol{\gamma}(x, t)$ n'est pas égale à la dérivée partielle par rapport au temps de $\mathbf{v}(x, t)$. Cela vient du fait que la position x du point varie au cours du temps. Posant $x = \mathbf{f}(X, t)$, d'après le théorème de dérivation des fonctions composées de plusieurs variables, on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}(\mathbf{f}(X, t), t)) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(\mathbf{f}(X, t), t) \frac{\partial f_i}{\partial t}(X, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(x, t) \underline{v}_i(X, t), \end{aligned}$$

c'est à dire, puisque $\underline{v}_i(X, t) = v_i(\mathbf{f}(X, t), t) = v_i(x, t)$

$$\boldsymbol{\gamma}(x, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i}(x, t) v_i(x, t).$$

On dit encore que la description eulérienne $\boldsymbol{\gamma}(x, t)$ de l'accélération est égale à la **dérivée particulaire** du champ des vitesses $\boldsymbol{v}(x, t)$ en description eulérienne. On a vu dérivée particulaire est notée $\frac{d}{dt}$. On a donc

$$\boldsymbol{\gamma}(x, t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(x, t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}(x, t)v_i(x, t).$$

Définition 2.3.1. On appelle dérivée particulaire d'une quantité k attachée à une particule la dérivée par rapport au temps de cette quantité quand on suit la particule dans son mouvement. Si la quantité k est donnée en description eulérienne

$$\frac{d}{dt}k(x, t) = \frac{\partial k}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial k}{\partial x_i}(x, t)v_i(x, t),$$

en abrégé,

$$\frac{d}{dt}k = \frac{\partial k}{\partial t} + \nabla k \cdot \boldsymbol{v}. \quad (2.3.2)$$

2.4 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume.

La formule que nous allons démontrer dans cette section permet d'obtenir la plupart des équations de mécanique des milieux continus, comme nous le verrons plus loin. Cette formule s'écrit :

Théorème 2.4.1.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} k(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \frac{d}{dt} k + k \operatorname{div} \boldsymbol{v} dx. \quad (2.4.1)$$

Le principe de la démonstration de cette formule consiste à se ramener par changement de variables à une intégrale sur le domaine fixe $\Omega(0)$, à dériver par rapport au temps, puis à revenir par le changement de variables inverse à une intégrale sur $\Omega(t)$. Commençons par énoncer la formule de changements de variables :

2.4.1 La formule de changements de variables

Théorème 2.4.2. Soit $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 , inversible et dont l'application réciproque est de classe C^1 . Soit $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application intégrable. Alors pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^3$, la **formule de changements de variables** suivante est vérifiée

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}(U)} k(x) d\mathcal{H}^3(x) = \int_U k(\boldsymbol{\varphi}(X)) |\det \nabla \boldsymbol{\varphi}| d\mathcal{H}^3(X). \quad (2.4.2)$$

Nous allons appliquer cette formule à t fixé avec $\boldsymbol{\varphi}(X) := \boldsymbol{f}(X, t)$, $U = \Omega(0)$, de sorte que $\boldsymbol{\varphi}(U) = \boldsymbol{f}(\Omega(0), t) = \Omega(t)$. Dans la suite, nous noterons $\boldsymbol{F}$ la matrice définie par

$$\boldsymbol{F} := \nabla \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial X_1} & \frac{\partial f_3}{\partial X_2} & \frac{\partial f_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}. \quad (2.4.3)$$

La matrice $\boldsymbol{F}$ est donc le gradient de la transformation $X \rightarrow \boldsymbol{f}(X, t)$, appelée aussi la matrice jacobienne de la transformation. Son déterminant, appelé le jacobien de la transformation, sera noté J . D'après (1.2.9) on a

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} F_{ip} F_{jq} F_{kr}. \quad (2.4.4)$$

Nous verrons plus loin (cf. exercice 2.4.2) que $J > 0$. La formule de changement de variables s'écrit alors

$$\int_{\Omega(t)} k(x, t) d\mathcal{H}^3(x) = \int_{\Omega(0)} k(f(X, t), t) J d\mathcal{H}^3(X). \quad (2.4.5)$$

Comme le domaine $\Omega(0)$ est fixe, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} k(x, t) d\mathcal{H}^3(x) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(0)} k(f(X, t), t) J d\mathcal{H}^3(X) \right) = \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (k(f(X, t), t) J) d\mathcal{H}^3(X) \\ &= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (k(f(X, t), t)) J d\mathcal{H}^3(X) + \int_{\Omega(0)} k(f(X, t), t) \frac{d}{dt} J d\mathcal{H}^3(X). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Le changement de variables inverse donne

$$\int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} (k(f(X, t), t)) J d\mathcal{H}^3(X) = \int_{\Omega(t)} \frac{d}{dt} k d\mathcal{H}^3(x). \quad (2.4.7)$$

Nous montrons plus loin, dans l'exercice 2.4.1, la formule suivante :

$$\frac{d}{dt} J = J \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

(2.4.8)

On a donc

$$\int_{\Omega(0)} k(f(X, t), t) \frac{d}{dt} J d\mathcal{H}^3(X) = \int_{\Omega(0)} k(f(X, t), t) J \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathcal{H}^3(X) = \int_{\Omega(t)} k \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathcal{H}^3(x). \quad (2.4.9)$$

Regroupant (2.4.6), (2.4.7), (2.4.9), la formule (2.4.1) est démontrée. $\square$

Exercice 2.4.1. Calcul de $\frac{d}{dt} J$.

1. Montrer en utilisant la formule (2.4.4) que

$$\frac{d}{dt} J = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \left(\frac{d}{dt} F_{ip} \right) F_{jq} F_{kr}. \quad (2.4.10)$$

2. Montrer en utilisant (2.2.1) et (2.4.3) que

$$\frac{d}{dt} F_{ip} = v_{i,s} F_{sp} \quad (2.4.11)$$

En déduire que

$$\frac{d}{dt} J = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} v_{i,s} F_{sp} F_{jq} F_{kr}.$$

3. En utilisant la formule (1.2.11), montrer que

$$\frac{d}{dt} J = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{sjk} v_{i,s} J.$$

4. Montrer que

$$\frac{d}{dt}J = J \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

La formule (2.4.8) est démontrée.

Remarque 2.4.1. D'après (2.4.11),

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{F} = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F}.} \quad (2.4.12)$$

Exercice 2.4.2. Le but de cet exercice est de montrer qu'à tout instant t , on a : $\det(\nabla \mathbf{f}) = J > 0$

1. Montrer que (en utilisant (2.1.2))

$$\nabla g(f(X, t)) \nabla \mathbf{f}(X, t) = \nabla(\mathbf{I}X) = \mathbf{I}.$$

2. En déduire que

$$\det(\nabla \mathbf{f}(X, t)) = J(X, t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que $J(X, t)$ garde un signe constant au cours du temps, puis (en considérant l'instant $t = 0$) que

$$J(X, t) > 0 \quad \forall X \in \Omega(0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 3

Lois de conservation

3.1 Loi de conservation de la masse

Enoncé : La masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante.

3.1.1 Equation de continuité.

Soit $\omega(t)$ un tel système. Sa masse est donnée par

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x, t) d\mathcal{H}^3, \quad (3.1.1)$$

où $\rho(x, t)$ désigne la masse volumique au point x à l'instant t . La loi de conservation de la masse dit que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0 \quad \forall \omega(t),$$

ce qui s'écrit, d'après le théorème 2.4.1

$$\int_{\omega(t)} \frac{d}{dt} \rho(x, t) + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 = 0 \quad \forall \omega(t).$$

De l'arbitraire sur $\omega(t)$, on déduit que la loi de conservation de la masse implique que la représentation eulérienne $\rho(x, t)$ de la masse volumique vérifie l'équation suivante, connue sous le nom d'équation de continuité :

Théorème 3.1.1. *Loi de conservation de la masse est équivalente à l'équation :*

$$\frac{d}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.1.2)$$

appelée l'équation de continuité.

Exercice 3.1.1. *Montrer que l'équation de continuité s'écrit encore*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.1.3)$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.1.4)$$

Indication : utiliser la formule de dérivation particulière (2.3.2).

Dans l'exercice suivant, nous examinons les conséquences de la loi de conservation de la masse sur les formules de dérivation particulaire.

Exercice 3.1.2. 1. Dédurre de la formule de dérivation particulaire d'une intégrale de volume et de l'équation de continuité (3.1.2) la formule importante suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho k(x, t) d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{d}{dt} k d\mathcal{H}^3. \quad (3.1.5)$$

2. En déduire que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v}(x, t) d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega(t)} \rho \boldsymbol{\gamma}(x, t) d\mathcal{H}^3. \quad (3.1.6)$$

3. Montrer que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{v}(x, t) d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega(t)} \rho \overrightarrow{OM} \wedge \boldsymbol{\gamma}(x, t) d\mathcal{H}^3. \quad (3.1.7)$$

3.2 Loi de conservation de la quantité de mouvement. Principe Fondamental de la Dynamique.

Enoncé du Principe Fondamental de la Dynamique pour les milieux continus.

Dans un repère galiléen, pour tout système matériel, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au système.

3.3 Equations du mouvement et équations d'équilibre d'un milieu continu

Considérons un système matériel $\Omega(t)$ et soit $\omega(t)$ un système matériel quelconque inclus dans $\Omega(t)$. Les forces extérieures agissant sur $\omega(t)$ sont des forces massiques de densité volumique $\rho \vec{f}$ dans $\omega(t)$ et des forces de contact de densité $\vec{F}(M, t, \mathbf{n})$ sur $\partial\omega(t)$, de sorte que le torseur des forces extérieures a une résultante et un moment en O donnés respectivement par

$$\begin{aligned} & \int_{\omega(t)} \rho \vec{f} d\mathcal{H}^3 + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\mathbf{n}) d\mathcal{H}^2, \\ & \int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{f} d\mathcal{H}^3 + \int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\mathbf{n}) d\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

Le torseur des quantités de mouvement a une résultante et un moment en O donnés respectivement par

$$\begin{aligned} & \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} d\mathcal{H}^3, \\ & \int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \mathbf{v} d\mathcal{H}^3. \end{aligned}$$

L'énoncé de la loi fondamentale de la dynamique se traduit donc par les égalités vectorielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 &= \int_{\omega(t)} \rho \vec{f} d\mathcal{H}^3 + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\mathbf{n}) d\mathcal{H}^2, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 &= \int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{f} d\mathcal{H}^3 + \int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\mathbf{n}) d\mathcal{H}^2. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Compte tenu de (3.1.5), on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^3 &= \int_{\omega(t)} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \boldsymbol{\gamma} \, d\mathcal{H}^3, \\ \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \mathbf{v} \, d\mathcal{H}^3 &= \int_{\omega(t)} \rho \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{v}) \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \overrightarrow{OM} \wedge \boldsymbol{\gamma} \, d\mathcal{H}^3.\end{aligned}$$

On déduit

$$\int_{\omega(t)} \rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f} \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2, \quad (3.3.2)$$

$$\int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f}) \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2. \quad (3.3.3)$$

Après un changement de notation, ces deux équations sont de la forme

$$\int_{\omega(t)} \mathbf{b} \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2.$$

Le Théorème de Cauchy, énoncé et démontré dans la section suivante, établit, lorsqu'une telle équation est vérifiée quel que soit $\omega(t)$, l'existence en tout point M d'une matrice $\mathbf{T}(M)$ telle que

$$\boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(M) \mathbf{n}.$$

Appliquant ce théorème pour $\mathbf{b} = \rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f}$ et $\boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{n}) = \vec{F}(M, \mathbf{n})$, on déduit de l'équation (3.3.2), vérifiée pour tout $\omega(t)$, l'existence d'une matrice, notée $\boldsymbol{\sigma}$ et appelée le **tenseur des contraintes de Cauchy**, telle que

$$\vec{F}(M, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M) \mathbf{n}. \quad (3.3.4)$$

Il résulte alors de la fomule de Stokes que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i \, d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\omega(t)} \sigma_{ij,j} \mathbf{e}_i \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{H}^3.\end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Combinant (3.3.2) et (3.3.5), on déduit

$$\int_{\omega(t)} \rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{H}^3 = 0.$$

Cette équation étant vraie pour tout $\omega(t)$, il en résulte

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \rho \vec{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.3.6)$$

Les équations (3.3.6) sont les **équations du mouvement du milieu continu**. Si le milieu est en équilibre ou en mouvement de translation uniforme, $\boldsymbol{\gamma} = 0$ et les équations se réduisent à

$$\rho \vec{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (3.3.7)$$

Les équations (3.3.7) sont les **équations d'équilibre du milieu continu**.

On déduit de (3.3.4) et de la formule de Stokes que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2 &= \int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\omega(t)} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l \mathbf{e}_i \, d\mathcal{H}^2 \\
&= \int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} (x_j \sigma_{kl})_{,l} \mathbf{e}_i \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{kl} \mathbf{e}_i + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} \mathbf{e}_i \, d\mathcal{H}^3 \\
&= \int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \mathbf{e}_i + \overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{H}^3,
\end{aligned}$$

soit

$$\int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \mathbf{e}_i + \overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{H}^3.$$

Reportant cette équation dans (3.3.3), on déduit

$$\int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge (\rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f}) \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \mathbf{e}_i + \overrightarrow{OM} \wedge \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{H}^3.$$

Compte tenu des équations du mouvement (3.3.6), il vient

$$\int_{\omega(t)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} \mathbf{e}_i \, d\mathcal{H}^3 = 0.$$

De l'arbitraire sur $\omega(t)$, on déduit

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ceci implique

$$\varepsilon_{pqi} \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, 3\}.$$

Appliquant la formule (1.1.11), il vient

$$(\delta_{pj} \delta_{qk} - \delta_{pk} \delta_{qj}) \sigma_{kj} = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, 3\},$$

équivalente à

$$\sigma_{qp} - \sigma_{pq} = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, 3\}.$$

Autrement dit, la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique. On peut résumer ces résultats dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *La loi de conservation de la quantité de mouvement (ou le principe fondamental de la dynamique) implique l'existence en chaque point M du milieu continu d'une matrice symétrique $\boldsymbol{\sigma}(M)$ appelée **tenseur des contraintes de Cauchy** et qui satisfait les équations du mouvement*

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \rho \vec{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}. \tag{3.3.8}$$

ou, si $\boldsymbol{\gamma} = 0$, les équations d'équilibre

$$\rho \vec{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{3.3.9}$$

3.4 Théorème de Cauchy

Théorème 3.4.1 (Théorème de Cauchy). Soit $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$ un champ de vecteurs défini dans Ω et soit $\alpha(M, \mathbf{n})$ une application dépendant du point M et d'un vecteur unitaire $\mathbf{n}$. On suppose que pour $\mathbf{n}$ fixé, l'application $M \rightarrow \alpha(M, \mathbf{n})$ est continue, que le champ $\mathbf{b}$ est borné, et que la loi de conservation suivante est vérifiée :

$$\int_{\omega} \mathbf{b} \, d\mathcal{H}^3 = \int_{\partial\omega} \alpha(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2, \quad \forall \omega \subset \Omega. \quad (3.4.1)$$

Alors, pour tout point $M \in \Omega$, il existe une matrice $\mathbf{T}(M)$ telle que

$$\alpha(M, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(M)\mathbf{n}.$$

Autrement dit, $\alpha(M, \mathbf{n})$ dépend linéairement de $\mathbf{n}$.

Démonstration.

Lemme 3.4.1. On a

$$\alpha(M, \mathbf{n}) = -\alpha(M, -\mathbf{n}). \quad (3.4.2)$$

Preuve du lemme. Soit Σ le plan passant par M orthogonal à $\mathbf{n}$ et soit ω une boule de centre M de rayon r . Le plan Σ partage la boule en deux demi-boules ω_1 et ω_2 . On suppose que $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à ω_1 en M . On désigne par $\partial_i\omega$ la partie de $\partial\omega$ qui est incluse dans $\partial\omega_i$. En appliquant (3.4.1) successivement à ω , ω_1 , ω_2 , notant $\boldsymbol{\nu}$ la normale extérieure à ω , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \mathbf{b} \, d\mathcal{H}^3 &= \int_{\partial\omega} \alpha(\boldsymbol{\nu}) \, d\mathcal{H}^2, \\ \int_{\omega_1} \mathbf{b} \, d\mathcal{H}^3 &= \int_{\partial_1\omega} \alpha(\boldsymbol{\nu}) \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Sigma \cap \omega} \alpha(\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2, \\ \int_{\omega_2} \mathbf{b} \, d\mathcal{H}^3 &= \int_{\partial_2\omega} \alpha(\boldsymbol{\nu}) \, d\mathcal{H}^2 + \int_{\Sigma \cap \omega} \alpha(-\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2. \end{aligned}$$

En ajoutant la deuxième et la troisième équation et en retranchant la dernière, on obtient

$$\int_{\Sigma \cap \omega} \alpha(\mathbf{n}) + \alpha(-\mathbf{n}) \, d\mathcal{H}^2 = 0.$$

De la nature arbitraire du choix de ω et de la continuité de $M \rightarrow \alpha(M, \mathbf{n})$, il résulte

$$\alpha(M, \mathbf{n}) = -\alpha(M, -\mathbf{n}).$$

Le lemme est démontré. □

En tout point $M \in \Omega$, on prolonge l'application $\mathbf{n} \rightarrow \alpha(M, \mathbf{n})$ définie sur les vecteurs unitaires, à tout vecteur non nul $\mathbf{v}$ en posant

$$\alpha(M, \mathbf{v}) := \|\mathbf{v}\| \alpha\left(M, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right).$$

De plus, on pose

$$\alpha(M, \vec{0}) := \vec{0}.$$

Lemme 3.4.2. *L'application $\alpha(M, \mathbf{v})$ ainsi définie vérifie pour tout vecteur $\mathbf{v}$:*

$$\alpha(M, \lambda \mathbf{v}) = \lambda \alpha(M, \mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.4.3)$$

Preuve du lemme.

$$\begin{aligned} \alpha(M, \lambda \mathbf{v}) &= \|\lambda \mathbf{v}\| \alpha\left(M, \frac{\lambda \mathbf{v}}{\|\lambda \mathbf{v}\|}\right) = |\lambda| \|\mathbf{v}\| \alpha\left(M, \text{signe}(\lambda) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \\ &= \text{signe}(\lambda) |\lambda| \|\mathbf{v}\| \alpha\left(M, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \lambda \|\mathbf{v}\| \alpha\left(M, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \lambda \alpha(M, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. $\square$

Lemme 3.4.3. *Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors*

$$\alpha(M, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha(M, \mathbf{v}) + \alpha(M, \mathbf{w}). \quad (3.4.4)$$

Preuve du lemme. Nous allons établir (3.4.4) en un point M_0 . Soient A et B les points définis par (voir figure 3.4)

$$\overrightarrow{M_0 A} = \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{M_0 B} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad (3.4.5)$$

H un point du segment $[M_0, B]$, $(D1)$ la droite perpendiculaire à $\mathbf{v}$ passant par M_0 , $(D2) \perp \mathbf{w}$ passant par M_0 , $(D3) \perp (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ passant par H , et soit

$$C := (D1) \cap (D3), \quad D := (D2) \cap (D3).$$

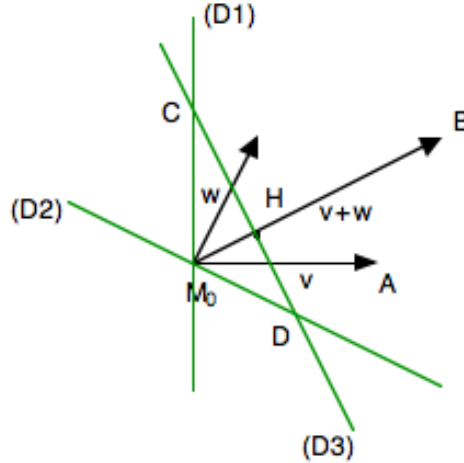


FIGURE 3.1 –

Les triangles (M_0CD) et (AM_0B) sont semblables car leurs cotés sont orthogonaux deux à deux. Il en résulte que

$$\frac{M_0C}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{M_0D}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{CD}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|} = \varepsilon, \quad (3.4.6)$$

où ε est une constante positive.

Soit $\mathcal{B}$ le prisme droit de base le triangle Δ_{M_0CD} situé au-dessus de Δ_{M_0CD} et de hauteur ε . On note $\partial_1 \mathcal{B}$, $\partial_2 \mathcal{B}$, $\partial_3 \mathcal{B}$ ses faces latérales opposées respectivement à C , D , M_0 , $\partial_4 \mathcal{B} = \Delta_{M_0CD}$ sa base inférieure, $\partial_5 \mathcal{B}$ sa face supérieure et $\mathbf{k}$ la normale extérieure unitaire à $\mathcal{B}$ sur $\partial_4 \mathcal{B}$ (voir figure 3.4).

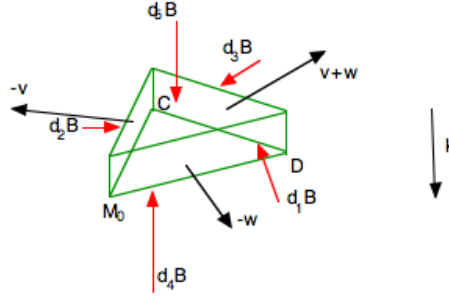


FIGURE 3.2 –

La normale extérieure unitaire $\mathbf{n}$ à $\partial\mathcal{B}$ vérifie

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{-\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \text{ sur } \partial_1\mathcal{B}, & \mathbf{n} &= \frac{-\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \text{ sur } \partial_2\mathcal{B}, & \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|} \text{ sur } \partial_3\mathcal{B}, \\ \mathbf{n} &= \mathbf{k} \text{ sur } \partial_4\mathcal{B}, & \mathbf{n} &= -\mathbf{k} \text{ sur } \partial_5\mathcal{B}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

De plus

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^3(\mathcal{B}) &= \varepsilon \mathcal{H}^2(\Delta_{M_0CD}) = \varepsilon^3 \mathcal{H}^2(\Delta_{M_0AB}) = \frac{\varepsilon^3}{2} \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|, \\ \mathcal{H}^2(\partial_1\mathcal{B}) &= \varepsilon^2 \|\mathbf{w}\|, & \mathcal{H}^2(\partial_2\mathcal{B}) &= \varepsilon^2 \|\mathbf{v}\|, & \mathcal{H}^2(\partial_3\mathcal{B}) &= \varepsilon^2 \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|, \\ \mathcal{H}^2(\partial_4\mathcal{B}) &= \mathcal{H}^2(\partial_5\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

D'après (3.4.1),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}(M) d\mathcal{H}^3(M) &= \int_{\partial_1\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}\left(M, \frac{-\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) d\mathcal{H}^2(M) + \int_{\partial_2\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}\left(M, \frac{-\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) d\mathcal{H}^2(M) \\ &+ \int_{\partial_3\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}\left(M, \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|}\right) d\mathcal{H}^2(M) \\ &+ \int_{\partial_4\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{k}) d\mathcal{H}^2(M) + \int_{\partial_5\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, -\mathbf{k}) d\mathcal{H}^2(M). \end{aligned}$$

Multiplions par $\frac{1}{\varepsilon^2}$ et appliquons (3.4.3). Compte tenu de (3.4.8) et de $\partial_5\mathcal{B} = \partial_4\mathcal{B} + \varepsilon\mathbf{k}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}(M) d\mathcal{H}^3(M) &= \frac{-1}{\mathcal{H}^2(\partial\mathcal{B}_1)} \int_{\partial_1\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{w}) d\mathcal{H}^2(M) + \frac{-1}{\mathcal{H}^2(\partial\mathcal{B}_2)} \int_{\partial_2\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{v}) d\mathcal{H}^2(M) \\ &+ \frac{1}{\mathcal{H}^2(\partial\mathcal{B}_3)} \int_{\partial_3\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{v} + \mathbf{w}) d\mathcal{H}^2(M) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\int_{\partial_4\mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{k}) - \boldsymbol{\alpha}(M + \varepsilon\mathbf{k}, \mathbf{k}) d\mathcal{H}^2(M) \right). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

D'après (3.4.8), puisque $\mathbf{b}$ est borné,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}(M) d\mathcal{H}^3(M) \leq C \frac{\mathcal{H}^3(\mathcal{B})}{\varepsilon^2} \leq C\varepsilon. \quad (3.4.10)$$

Comme $M \rightarrow \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{n})$ est continue, on a $\|\boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{k}) - \boldsymbol{\alpha}(M + \varepsilon\mathbf{k}, \mathbf{k})\| \rightarrow 0$ uniformément sur $\partial_4\mathcal{B}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donc d'après (3.4.8)

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left| \int_{\partial_4 \mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{k}) - \boldsymbol{\alpha}(M + \varepsilon \mathbf{k}, \mathbf{k}) d\mathcal{H}^2(M) \right| = o(1) \frac{\mathcal{H}^2(\partial_4 \mathcal{B})}{\varepsilon^2} = o(1) \frac{\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|}{2} = o(1). \quad (3.4.11)$$

De même, $\|\boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{w}) - \boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{w})\| \rightarrow 0$ uniformément sur $\partial_1 \mathcal{B}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\mathcal{H}^2(\partial \mathcal{B}_1)} \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{w}) d\mathcal{H}^2(M) &= \left(\frac{-1}{\mathcal{H}^2(\partial \mathcal{B}_1)} \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{w}) d\mathcal{H}^2(M) \right) (1 + o(1)) \\ &= -\boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{w}) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\mathcal{H}^2(\partial \mathcal{B}_1)} \int_{\partial_1 \mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{w}) d\mathcal{H}^2(M) &+ \frac{-1}{\mathcal{H}^2(\partial \mathcal{B}_2)} \int_{\partial_2 \mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{v}) d\mathcal{H}^2(M) \\ &+ \frac{1}{\mathcal{H}^2(\partial \mathcal{B}_3)} \int_{\partial_3 \mathcal{B}} \boldsymbol{\alpha}(M, \mathbf{v} + \mathbf{w}) d\mathcal{H}^2(M) \\ &= (-\boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{w}) - \boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{v} + \mathbf{w})) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Reportant (3.4.10), (3.4.11), (3.4.12) dans (3.4.9), on obtient

$$o(1) = (-\boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{w}) - \boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\alpha}(M_0, \mathbf{v} + \mathbf{w})) (1 + o(1)) + o(1),$$

ce qui prouve (3.4.4) et achève la preuve du théorème de Cauchy. $\square$

3.5 Conservation de l'énergie

3.5.1 Premier principe de la thermodynamique

Enoncé. Pour tout système matériel, il existe une fonction énergie interne spécifique (c'est à dire par unité de masse) $e(x, t)$, telle que la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique) soit égale à la puissance des forces extérieures appliquées au système plus les apports de chaleur par unité de temps.

3.5.2 Tenseur des vitesses de déformation

Le tenseur des vitesses de déformation est la matrice $D\mathbf{v}$ définie par

$$D\mathbf{v} := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v}). \quad (3.5.1)$$

3.5.3 Equation de l'énergie

Théorème 3.5.1. *Le premier principe de la thermodynamique entraîne que l'énergie interne spécifique e vérifie l'équation suivante, appelée **équation de l'énergie** :*

$$\rho \frac{d}{dt} e = \boldsymbol{\sigma} : D\mathbf{v} + \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (3.5.2)$$

où ρw désigne les apports volumiques de chaleur par unité de temps et $\mathbf{q}$ le vecteur flux de chaleur.

Preuve. Soit $\omega(t) \subset \Omega(t)$ un sous-système matériel d'un système matériel $\Omega(t)$. L'énergie interne du système $\omega(t)$ est donnée par

$$\int_{\omega(t)} \rho e d\mathcal{H}^3,$$

et son énergie cinétique par

$$\int_{\omega(t)} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 d\mathcal{H}^3.$$

La puissance des forces extérieures volumiques s'écrit

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3,$$

et celle des forces extérieures surfaciques

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{F} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2.$$

Les apports volumiques de chaleurs valent

$$\int_{\omega(t)} \rho w d\mathcal{H}^3,$$

et les apports surfaciques de chaleur sont donnés par

$$\int_{\partial\omega(t)} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2.$$

Le premier principe de la thermodynamique nous dit donc que

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \right) d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2 + \int_{\omega(t)} \rho w d\mathcal{H}^3 - \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2. \quad (3.5.3)$$

D'après (3.3.4) on a $\vec{F} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, donc

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{F} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\omega(t)} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j v_i d\mathcal{H}^2.$$

En appliquant la formule de Stokes (voir (1.8.1)), on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega(t)} \vec{F} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2 &= \int_{\omega(t)} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j} d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\omega(t)} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{H}^3, \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

où $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ désigne le produit scalaire matriciel défini dans la section 1.1.2 (voir aussi (1.1.1)). De même

$$\int_{\partial\omega(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\omega(t)} q_i n_i d\mathcal{H}^2 = \int_{\omega(t)} q_{i,i} d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \operatorname{div} \mathbf{q} d\mathcal{H}^3. \quad (3.5.5)$$

D'après la formule (3.1.5) de dérivation particulière d'une intégrale de volume en présence de ρ , on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \right) d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \rho \frac{de}{dt} d\mathcal{H}^3 \quad (3.5.6)$$

En combinant (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5), et (3.5.6), on obtient l'équation

$$\int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \rho \frac{de}{dt} d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q} d\mathcal{H}^3,$$

équivalente à

$$\int_{\omega(t)} \mathbf{v} \cdot (\rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) + \rho \frac{de}{dt} d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q} d\mathcal{H}^3.$$

Les équations du mouvement (3.3.8) du milieu continu nous disent que $\rho \boldsymbol{\gamma} - \rho \vec{f} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$. On déduit

$$\int_{\omega(t)} \rho \frac{de}{dt} d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q} d\mathcal{H}^3.$$

Cette dernière équation étant vraie pour tout sous-système $\omega(t)$ de $\Omega(t)$, il en résulte que

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q}.$$

Compte tenu de la définition (3.5.1) de $D\mathbf{v}$ et du fait que la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique, on a

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : D\mathbf{v}.$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient l'équation de l'énergie (3.5.2). $\square$

3.5.4 Cas d'un milieu au repos : équation de la chaleur, loi de Fourier.

Dans un milieu au repos, $\mathbf{v} = 0$ et $\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla e \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial e}{\partial t}$, donc l'équation de l'énergie (3.5.2) s'écrit

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho w - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (3.5.7)$$

Dans un milieu au repos, les deux lois physiques approchées suivantes sont expérimentalement vérifiées (ce type de loi est appelé "loi de comportement") :

- L'énergie interne e est proportionnelle à la température absolue T , soit

$$e = CT, \quad (3.5.8)$$

où le coefficient C est appelé la chaleur spécifique.

- Le vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}$ est proportionnel au vecteur gradient de température et dirigé en sens opposé (c'est la **loi de Fourier**), soit

$$\mathbf{q} = -K \nabla T, \quad K > 0. \quad (3.5.9)$$

En reportant (3.5.8) et (3.5.9) dans (3.5.7), on obtient l'**équation de la chaleur**

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho w + \operatorname{div} (K \nabla T). \quad (3.5.10)$$

Le scalaire positif K est appelé le coefficient de diffusion de la chaleur ou la conductivité thermique. Si le milieu est anisotrope, le coefficient K doit être remplacé par une matrice de diffusivité symétrique définie positive. Si le milieu est homogène, cette diffusivité ne dépend pas de x , donc $\operatorname{div} (K \nabla T) = K \operatorname{div} (\nabla T) = K \Delta T$ et (3.5.10) devient

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho w + K \Delta T.$$

3.6 Second principe de la thermodynamique. Inégalité de Clausius-Duhem

3.6.1 Second principe de la thermodynamique.

Enoncé. Pour tout système matériel, il existe une fonction interne spécifique (c'est à dire par unité de masse) notée s et appelée entropie spécifique, telle que, pour tout système matériel $\omega(t)$, la dérivée par rapport au temps de l'entropie totale $\int_{\omega(t)} \rho s d\mathcal{H}^3$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho s d\mathcal{H}^3 \geq \int_{\omega(t)} \rho \frac{w}{T} d\mathcal{H}^3 - \int_{\partial\omega(t)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} d\mathcal{H}^2 \quad \forall \omega(t), \quad (3.6.1)$$

où T est la température absolue.

Théorème 3.6.1. Le second principe de la thermodynamique équivaut à l'inégalité suivante :

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \rho \frac{w}{T} - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right). \quad (3.6.2)$$

Démonstration. On a $\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho s d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \rho \frac{ds}{dt} d\mathcal{H}^3$ et

$$\int_{\partial\omega(t)} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial\omega(t)} \frac{q_i}{T} n_i d\mathcal{H}^2 = \int_{\omega(t)} \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} d\mathcal{H}^3 = \int_{\omega(t)} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) d\mathcal{H}^3,$$

donc (3.6.1) équivaut à

$$\int_{\omega(t)} \rho \frac{ds}{dt} - \rho \frac{w}{T} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) d\mathcal{H}^3 \geq 0 \quad \forall \omega(t),$$

qui équivaut à (3.6.2). □

3.6.2 Inégalité de Clausius-Duhem

Théorème 3.6.2. L'inégalité (3.6.2) est équivalente à l'inégalité suivante, appelée **inégalité de Clausius-Duhem** :

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\mathbf{v} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T} \geq 0. \quad (3.6.3)$$

Démonstration. D'après (3.5.2) $\rho w = \rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q}$, donc l'inégalité (3.6.2) est équivalente à

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{1}{T} \left(\rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right),$$

qui, compte tenu de

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} = \left(\frac{q_{i,i}}{T} \right) - \frac{T_{,i} q_i}{T^2} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} - \frac{\nabla T \cdot \mathbf{q}}{T^2},$$

équivalant

$$\rho \frac{ds}{dt} \geq \frac{1}{T} \left(\rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} \right) - \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} + \frac{\nabla T \cdot \mathbf{q}}{T^2},$$

qui, en multipliant par T , donne

$$\rho T \frac{ds}{dt} \geq \rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\mathbf{v} + \frac{\nabla T \cdot \mathbf{q}}{T},$$

équivalente à (3.6.3). □

Chapitre 4

Etude du tenseur des contraintes

4.1 Exercice : cercles de Mohr

On a vu dans le chapitre précédent que la densité surfacique de forces qui s'exerce en un point M sur toute région limitée par une surface passant par M de normale extérieure $\mathbf{n}$ au point M est donnée par la formule (3.3.4), c'est à dire par :

$$\vec{F}(M, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n}. \quad (4.1.1)$$

Le vecteur $\vec{F}$ est appelé le **vecteur contrainte**. Il se décompose sous la forme de la somme d'un vecteur $T_n(M, \mathbf{n})\mathbf{n}$ parallèle à $\mathbf{n}$ (donc normal à la surface) et d'un vecteur $\vec{T}_t(M, \mathbf{n})$ orthogonal à $\mathbf{n}$ (donc tangent à la surface) :

$$\vec{F} = T_n\mathbf{n} + \vec{T}_t, \quad T_n = \vec{F} \cdot \mathbf{n}, \quad \vec{T}_t = \vec{F} - T_n\mathbf{n}. \quad (4.1.2)$$

L'objectif de ce problème est de répondre à la question suivante : étant donnés un tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et deux nombres réels X (de signe quelconque) et Y (positif ou nul), existe-t-il une direction $\mathbf{n}$ telle que

$$X = T_n(\mathbf{n}), \quad Y = \|\vec{T}_t(\mathbf{n})\|? \quad (4.1.3)$$

Dans la suite, on note $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ les contraintes normales principales associées à $\boldsymbol{\sigma}$ (c'est à dire les valeurs propres de $\boldsymbol{\sigma}$), que l'on suppose associées, respectivement, à des vecteurs propres $\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III}$ (directions principales de contraintes) choisis de telle sorte que $(\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III})$ constitue une base orthonormée directe (c'est toujours possible puisque $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique).

1. Soit $\mathbf{n}$ un vecteur normé $\mathbf{n}$ de composantes n_1, n_2, n_3 dans la base $(\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III})$. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= n_1\boldsymbol{\nu}_I + n_2\boldsymbol{\nu}_{II} + n_3\boldsymbol{\nu}_{III} \\ \boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n} &= n_1\sigma_I\boldsymbol{\nu}_I + n_2\sigma_{II}\boldsymbol{\nu}_{II} + n_3\sigma_{III}\boldsymbol{\nu}_{III} \\ (\boldsymbol{\sigma}(M)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

2. Montrer que si le vecteur normé $\mathbf{n}$ vérifie (4.1.3), alors ses composantes n_1, n_2, n_3 dans la base $(\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III})$ satisfont

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \\ \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 &= X \\ \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 &= X^2 + Y^2. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Le système (4.1.5) est un système de 3 équations linéaires par rapport aux inconnues n_1^2, n_2^2, n_3^2 . Du fait de sa structure particulière (matrice de Vandermonde) il se résout aisément de la manière suivante :

3. Soient $P(x)$ un polynôme quelconque de degré 2 s'écrivant sous la forme $P(x) = x^2 + ax + b$. Montrer que

$$n_1^2 P(\sigma_I) + n_2^2 P(\sigma_{II}) + n_3^2 P(\sigma_{III}) = Y^2 + P(X)$$

4. On choisit le polynôme unitaire P du second degré s'annulant pour σ_{II} et σ_{III} , soit $P(x) = (x - \sigma_{II})(x - \sigma_{III})$. En déduire que

$$n_1^2(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III}) = Y^2 + (X - \sigma_{II})(X - \sigma_{III}). \quad (4.1.6)$$

Montrer de même que

$$n_2^2(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I) = Y^2 + (X - \sigma_{III})(X - \sigma_I), \quad (4.1.7)$$

$$n_3^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}) = Y^2 + (X - \sigma_I)(X - \sigma_{II}). \quad (4.1.8)$$

5. On suppose de plus que

$$\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}. \quad (4.1.9)$$

Vérifier que

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{Y^2 + (X - \sigma_{II})(X - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}, \\ n_2^2 &= \frac{Y^2 + (X - \sigma_{III})(X - \sigma_I)}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)}, \\ n_3^2 &= \frac{Y^2 + (X - \sigma_I)(X - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

6. Les formules (4.1.10) fournissent n_1, n_2, n_3 à la condition nécessaire et suffisante que le point

$$P = (X, Y)$$

soit tel que

$$\begin{aligned} Y^2 + (X - \sigma_{II})(X - \sigma_{III}) &\geq 0, \\ Y^2 + (X - \sigma_I)(X - \sigma_{III}) &\leq 0, \\ Y^2 + (X - \sigma_I)(X - \sigma_{II}) &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Montrer qu'une équation de la forme

$$Y^2 + (X - a)(X - b) = 0, \quad (4.1.12)$$

s'écrit aussi

$$Y^2 + \left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

En déduire que l'équation (4.1.12) représente le cercle de rayon $\left|\frac{a-b}{2}\right|$ et de centre de coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$. Ce cercle est centré sur OX et passe par les points de OX d'abscisse a et b .

7. Déduire des inégalités (4.1.11) que le point P doit se trouver dans la région délimitée par les trois cercles centrés sur OX et passant par les points d'abscisse $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ comme l'indique la figure 4.1 **et qu'inversement, pour tout point $P(X, Y)$ appartenant à cette région, il existe un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ vérifiant (4.1.3) : de plus, les composantes de ce vecteur $\mathbf{n}$ sont données, au signe près, par (4.1.10).** Dans cette figure, on n'a tracé que des demi-cercles car Y est toujours positif ou nul, et on a hachuré les régions qui ne sont pas atteintes par $P = (X, Y)$. On a donc démontré le théorème suivant :

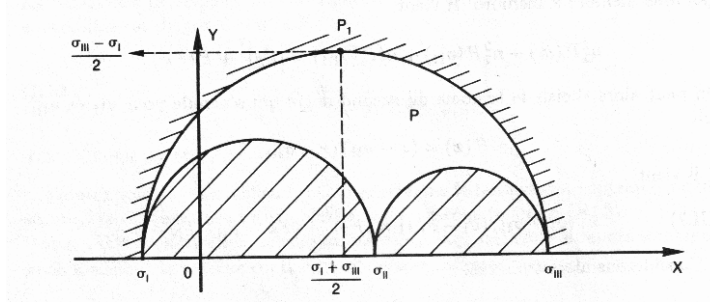


FIGURE 4.1 – Diagramme de Mohr

Théorème 4.1.1. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On suppose (4.1.9). Alors, il existe un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ vérifiant (4.1.3) si et seulement si le couple (X, Y) se situe dans la zone non hachurée de la figure 4.1. Pour tout couple (X, Y) appartenant à la zone non hachurée de la figure 4.1, tout vecteur $\mathbf{n}$ dont les carrés n_1^2 , n_2^2 et n_3^2 des composantes dans la base $(\mathbf{v}_I, \mathbf{v}_{II}, \mathbf{v}_{III})$ sont données par (4.1.10) vérifie (4.1.3).

8. Dédire de (4.1.10) que si $\mathbf{n}$ se déplace dans le plan $\mathbf{v}_I, \mathbf{v}_{II}$, c'est à dire si $n_3 = 0$, alors le point $P = (X(\mathbf{n}), Y(\mathbf{n}))$ se déplace sur le demi-cercle de diamètre $((\sigma_I, 0), (\sigma_{II}, 0))$, et réciproquement. Généraliser aux deux autres demi-cercles.
9. Le diagramme de Mohr montre que

$$\sigma_I \leq X(\mathbf{n}) \leq \sigma_{III} \quad \forall \mathbf{n},$$

que la contrainte tangentielle maximale est atteinte au point P_1 donné par

$$P_1 = \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}, \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2} \right),$$

et qu'elle est donnée par

$$Y_{max} = \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}.$$

Vérifier que les directions $\mathbf{n}$ correspondantes sont dans le plan $\mathbf{v}_I, \mathbf{v}_{III}$ et satisfont (Indication : utiliser (4.1.10))

$$n_1 = \pm n_3, \quad n_2 = 0.$$

Les deux plans associés à cette contrainte tangentielle maximale, appelés parfois *plan de cisaillement maximal*, sont les plans bissecteurs des directions principales $\mathbf{v}_I$ et $\mathbf{v}_{III}$ correspondant aux contraintes normales principales extrêmes. C'est fréquemment cette contrainte de cisaillement maximale qui provoque des ruptures du matériau, d'où des faces de rupture en dent de scie (cf. figure 2).

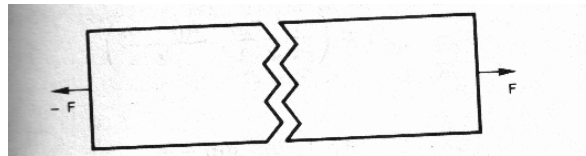


FIGURE 4.2 – Rupture en dent de scie

10. On suppose maintenant que

$$\sigma_I = \sigma_{II} < \sigma_{III}$$

En utilisant (4.1.8), montrer qu'alors le point $P = (X, Y)$ se trouve nécessairement sur le cercle de diamètre $((\sigma_I, 0), (\sigma_{III}, 0))$.

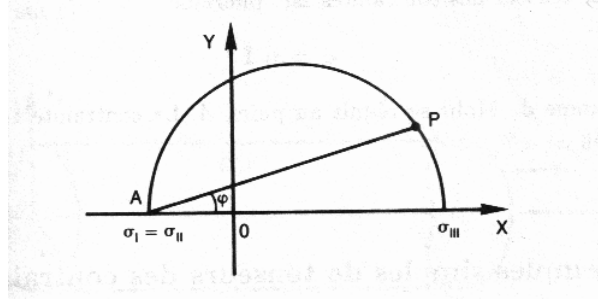


FIGURE 4.3 – cas $\sigma_I = \sigma_{II} < \sigma_{III}$

Vérifier que l'angle φ représenté sur la figure 4.3 vérifie

$$\cos \varphi = \frac{X - \sigma_I}{AP} = \frac{AP}{\sigma_{III} - \sigma_I},$$

et que n_3 défini par (4.1.10) satisfait

$$n_3^2 = \frac{AP^2}{(\sigma_{III} - \sigma_I)^2}.$$

En déduire que φ représente l'angle de $\mathbf{n}$ avec la direction principale $\boldsymbol{\nu}_{III}$ (i.e. que $|\cos \varphi| = |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}_{III}|$).

11. Montrer qu'à chaque point P du demi-cercle correspond tout un cône de directions $\mathbf{n}$, cône de révolution d'axe $\boldsymbol{\nu}_{III}$ et de demi-angle au sommet $(\vec{OX}, \vec{AP}) = \varphi$. En particulier, vérifier que le point A sur la figure 3 correspond à tout le plan $\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}$.
12. En quel point la contrainte tangentielle maximale est-elle atteinte et quelle est sa valeur ? Quels sont les plans de cisaillement maximal ?
13. Que se passe-t-il dans le cas $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$?

4.2 Exercice : tenseur des contraintes plan. Fonction d'Airy

On dit qu'un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est plan (relativement au plan (O, x_1, x_2) s'il ne dépend que de x_1 et de x_2 , et est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour un champ de contraintes plan, si les forces volumiques sont nulles, les équations d'équilibre $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$ s'écrivent

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (4.2.2)$$

On a vu précédemment (cf. (1.7.16)) que

$$[\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbb{R}^2), \quad f_{1,1} + f_{2,2} = 0] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varphi(x_1, x_2) \in C^2(U), \quad \begin{cases} f_1 = \varphi_{,2} \\ f_2 = -\varphi_{,1} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

On suppose de plus que $\boldsymbol{\sigma}$ est de classe C^1 .

1. Montrer que, compte tenu de (4.2.3), l'équation (4.2.1) entraîne

$$\exists \varphi_1(x_1, x_2) \in C^2(U), \quad \begin{cases} \sigma_{11} = (\varphi_1)_{,2} \\ \sigma_{12} = -(\varphi_1)_{,1} \end{cases}.$$

2. Montrer que, compte tenu de (4.2.3), l'équation (4.2.2) entraîne

$$\exists \varphi_2(x_1, x_2) \in C^2(U), \quad \begin{cases} \sigma_{21} = (\varphi_2)_{,2} \\ \sigma_{22} = -(\varphi_2)_{,1} \end{cases}.$$

3. Dédire de la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ que

$$(\varphi_1)_{,1} + (\varphi_2)_{,2} = 0.$$

4. Appliquant à nouveau (4.2.3), montrer que

$$\exists \chi(x_1, x_2) \in C^3(U), \quad \begin{cases} \varphi_1 = \chi_{,2} \\ \varphi_2 = -\chi_{,1} \end{cases}.$$

5. En déduire que

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \chi_{,22} & -\chi_{,12} & 0 \\ -\chi_{,12} & \chi_{,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction χ est appelée fonction **d'Airy**. Inversement, pour toute fonction $\chi(x_1, x_2)$ de classe C^3 , le champ $\boldsymbol{\sigma}$ défini ci-dessus est un champ de contrainte plan.

Chapitre 5

Etude des déformations

5.1 Notion de déformation

On dira qu'un milieu continu en mouvement a subi des déformations entre l'instant $t = 0$ et l'instant t si les distances relatives des points ont varié. La notion de déformation est locale : le milieu peut se déformer à certains endroits et ne pas se déformer à d'autres endroits. On est amené à étudier la présence de déformation à l'échelle microscopique, c'est à dire à étudier les variations de distance entre points très proches les uns des autres. La formule de Taylor permet alors d'exprimer ces variations en fonction du gradient de la transformation. Supposons que le milieu continu en mouvement soit défini par la transformation

$$\mathbf{f} : (X, t) \in \Omega(0) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{f}(X, t) \in \Omega(t). \quad (5.1.1)$$

Pour simplifier les notations, on pose, comme dans (2.4.3),

$$\mathbf{F}(X, t) := \nabla \mathbf{f}(X, t).$$

La matrice $\mathbf{F}$, qui est la matrice jacobienne de la transformation $\mathbf{f}$, est appelée le gradient de la transformation. Le développement de Taylor au premier ordre s'écrit (voir Remarque 5.1.1)

$$\mathbf{f}(X, t) - \mathbf{f}(X_0, t) = \mathbf{F}(X, t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + o(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|) \quad \forall \mathbf{X}_0, \mathbf{X} \in \Omega(0). \quad (5.1.2)$$

Lorsque $\mathbf{X}$ est proche de $\mathbf{X}_0$, le terme $o(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|)$ peut être négligé. Dans ce cas, notant

$$\overrightarrow{dM_0} := \mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \quad \overrightarrow{dM} := \mathbf{f}(X, t) - \mathbf{f}(X_0, t),$$

l'équation (5.1.2) devient

$$\overrightarrow{dM} = \mathbf{F} \overrightarrow{dM_0}. \quad (5.1.3)$$

Choisissons un second point quelconque de coordonnée $\mathbf{X}'$ proche de $\mathbf{X}_0$ et posons

$$\overrightarrow{\delta M_0} := \mathbf{X}' - \mathbf{X}_0, \quad \overrightarrow{\delta M} := \mathbf{f}(X', t) - \mathbf{f}(X_0, t).$$

On obtient de la même façon

$$\overrightarrow{\delta M} = \mathbf{F} \overrightarrow{\delta M_0}. \quad (5.1.4)$$

La déformation au voisinage du point M_0 peut se caractériser en étudiant les variations de produits scalaires

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \overrightarrow{\delta M_0},$$

en fonction des vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{dM_0}, \overrightarrow{\delta M_0}$.

Remarque 5.1.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^N(\Omega)$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$ et tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, on introduit les notations

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \\ D^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Le développement de Taylor de f à l'ordre N au point $x_0 \in \Omega$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq N} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + o(\|x - x_0\|^N). \quad (5.1.5)$$

5.2 Tenseur des dilatations. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Posons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM_0} &:= (dX_1, dX_2, dX_3), & \overrightarrow{\delta M_0} &:= (\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3), \\ \overrightarrow{dM} &:= (dx_1, dx_2, dx_3), & \overrightarrow{\delta M} &:= (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Compte tenu de (1.1.2), (5.1.3) et (5.1.4), on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} &= (\mathbf{F} \overrightarrow{dM_0}) \cdot (\mathbf{F} \overrightarrow{\delta M_0}) \\ &= \overrightarrow{dM_0} \cdot (\mathbf{F}^t \mathbf{F}) \overrightarrow{\delta M_0} = \overrightarrow{dM_0} \cdot \mathbf{C} \overrightarrow{\delta M_0}, \end{aligned}$$

où la matrice symétrique $\mathbf{C}$ définie par

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (5.2.2)$$

est appelée le **tenseur des dilatations**. On déduit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} - \overrightarrow{dM_0} \overrightarrow{\delta M_0} &= \overrightarrow{dM_0} \cdot \mathbf{C} \overrightarrow{\delta M_0} - \overrightarrow{dM_0} \cdot \mathbf{I} \overrightarrow{\delta M_0} = \overrightarrow{dM_0} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \overrightarrow{\delta M_0}, \\ &= 2 \overrightarrow{dM_0} \cdot \mathbf{E} \overrightarrow{\delta M_0}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

où la matrice $\mathbf{E}$, définie par

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (5.2.4)$$

est appelée le **tenseur des déformations**. On a donc

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{\delta M} = \overrightarrow{dM_0} \overrightarrow{\delta M_0} \quad \forall \overrightarrow{dM_0}, \forall \overrightarrow{\delta M_0} \iff \mathbf{E} = 0.$$

Théorème 5.2.1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas de déformation au point M de coordonnée de Lagrange X à l'instant t par rapport à la configuration initiale $\Omega(0)$ est que le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ défini par (5.2.4) vérifie $\mathbf{E}(X, t) = 0$.

La matrice des dilatations $\mathbf{C}$ est symétrique et possède donc une base orthonormée de vecteurs propres $(\boldsymbol{\nu}_I, \boldsymbol{\nu}_{II}, \boldsymbol{\nu}_{III})$. Ces vecteurs sont appelés les **directions principales de déformation**. Ses valeurs propres C_I, C_{II}, C_{III} sont appelées les **dilatations principales**. Le tenseur des déformations de Green

Lagrange $\mathbf{E}$ est symétrique, possède les mêmes directions propres que $\mathbf{C}$. Ses valeurs propres E_I, E_{II}, E_{III} , données par

$$E_J = \frac{1}{2}(C_J - 1), \quad (5.2.5)$$

sont appelées les **déformations principales**. On a :

Théorème 5.2.2. *Les dilatations principales C_I, C_{II}, C_{III} et les déformations principales E_I, E_{II}, E_{III} vérifient*

$$\begin{aligned} C_J &> 0, & \forall J \in \{I, II, III\} \\ E_J &> -\frac{1}{2}, & \forall J \in \{I, II, III\}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Démonstration. On a

$$C_I = \mathbf{C}\boldsymbol{\nu}_I \cdot \boldsymbol{\nu}_I = \mathbf{F}^t \mathbf{F} \boldsymbol{\nu}_I \cdot \boldsymbol{\nu}_I = \mathbf{F} \boldsymbol{\nu}_I \cdot \mathbf{F} \boldsymbol{\nu}_I = \|\mathbf{F} \boldsymbol{\nu}_I\|^2 > 0 \quad \text{car } \det \mathbf{F} > 0 \quad (\text{cf. exercice 2.4.2}).$$

L'inégalité $E_J > -\frac{1}{2}$ résulte de (5.2.5). □

5.3 Variation des longueurs

Considérons un élément matériel $\overrightarrow{dM}_0$ à l'instant $t = 0$, de longueur $dl_0 = \|\overrightarrow{dM}_0\|$ et de direction $\mathbf{n}_0$ (unitaire), i.e. $\overrightarrow{dM}_0 = dl_0 \mathbf{n}_0$. A l'instant t , cet élément matériel est devenu $\overrightarrow{dM}$ et sa longueur est $dl = \|\overrightarrow{dM}\|$. En choisissant $\overrightarrow{\delta M}_0 = \overrightarrow{dM}_0$ (et donc $\overrightarrow{\delta M} = \overrightarrow{dM}$) dans (5.2.3), on obtient

$$\begin{aligned} dl^2 - dl_0^2 &= \|\overrightarrow{dM}\|^2 - \|\overrightarrow{dM}_0\|^2 = 2\overrightarrow{dM}_0 \cdot \mathbf{E} \overrightarrow{dM}_0 = 2dl_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E} (dl_0 \mathbf{n}_0) \\ &= 2dl_0^2 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_0, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = 2\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_0, \quad (5.3.1)$$

puis

$$\begin{aligned} \left(\frac{dl}{dl_0} \right)^2 &= 1 + 2\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_0 \cdot 2\mathbf{E} \mathbf{n}_0 \\ &= \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{n}_0 \quad \text{d'après (5.2.4)}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{dl}{dl_0} = \sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \mathbf{n}_0} \quad (5.3.2)$$

Lorsque $\mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J$ est un vecteur propre de $\mathbf{C}$, c'est à dire une direction principale de déformation, on obtient

$$\left(\frac{dl}{dl_0} \right)^2 = C_J = 1 + 2E_J \quad \text{si } \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J,$$

ce qui donne une interprétation des dilatations principales et justifie cette dénomination. On déduit

$$\frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = 2E_J \quad \text{si} \quad \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J,$$

soit

$$\frac{dl}{dl_0} = \sqrt{1 + 2E_J} \quad \text{si} \quad \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J. \quad (5.3.3)$$

Si E_J est petit (ce qui est en général le cas lorsque le milieu considéré est un solide élastique), on a $\sqrt{1 + 2E_J} = 1 + E_J + o(E_J)$, et

$$\frac{dl}{dl_0} = 1 + E_J + o(E_J), \quad \frac{dl - dl_0}{dl_0} = E_J + o(E_J) \quad \text{si} \quad \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J,$$

ce qui donne une interprétation de la déformation principale E_J dans la direction principale de déformation $\boldsymbol{\nu}_J$.

5.4 Variations d'angles

Considérons deux éléments matériels $\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M_0}$ faisant entre eux un angle θ_0 . Posons

$$\overrightarrow{dM_0} = \mathbf{n}_0 dl_0, \quad \overrightarrow{\delta M_0} = \boldsymbol{\nu}_0 \delta l_0,$$

où $\mathbf{n}_0$ et $\boldsymbol{\nu}_0$ sont des vecteurs unitaires. A l'instant t , ces éléments sont devenus $\overrightarrow{dM}$ et $\overrightarrow{\delta M}$ et font entre eux un angle θ . Posons

$$\overrightarrow{dM} = \mathbf{n} dl, \quad \overrightarrow{\delta M} = \boldsymbol{\nu} \delta l,$$

où $\mathbf{n}$ et $\boldsymbol{\nu}$ sont des vecteurs unitaires. Nous avons

$$\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}_0 = \cos \theta_0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = \cos \theta.$$

En appliquant la formule (5.2.3), on obtient

$$\cos \theta dl \delta l - \cos \theta_0 dl_0 \delta l_0 = 2 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\nu}_0 dl_0 \delta l_0,$$

d'où

$$\cos \theta = (\cos \theta_0 + 2 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\nu}_0) \frac{dl_0}{dl} \frac{\delta l_0}{\delta l} = (\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \boldsymbol{\nu}_0) \frac{dl_0}{dl} \frac{\delta l_0}{\delta l},$$

et, compte tenu de (5.3.2),

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \boldsymbol{\nu}_0}{\sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \mathbf{n}_0} \sqrt{\boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \boldsymbol{\nu}_0}} \quad (5.4.1)$$

Si $\mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J$,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \boldsymbol{\nu}_0 &= \boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_0 (1 + 2E_J) \mathbf{n}_0 = (1 + 2E_J) \cos \theta_0, \\ \sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \mathbf{n}_0} &= \sqrt{1 + 2E_J}, \end{aligned}$$

soit

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1 + 2E_J}}{\sqrt{\boldsymbol{\nu}_0 \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \boldsymbol{\nu}_0}} \cos \theta_0 \quad \text{si} \quad \mathbf{n}_0 = \boldsymbol{\nu}_J. \quad (5.4.2)$$

En particulier, si $\boldsymbol{\nu}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = \cos \theta_0 = 0$, alors $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$.

5.5 Changement de variable pour les intégrales de surfaces

Afin d'établir les équations de l'élasticité linéaire (Chapitre 6), nous aurons besoin d'une formule de changement de variable pour les intégrales de surfaces analogue à celle de changement de variable pour les intégrales de volumes considérée dans (2.4.5).

Théorème 5.5.1 (formule de changement de variable pour les intégrales de surfaces). *Soit un milieu continu défini par une transformation*

$$\mathbf{f} : (X, t) \in \Omega(0) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbf{f}(X, t) \in \Omega(t).$$

Soit

$$\mathbf{F}(X, t) := \nabla \mathbf{f}(X, t),$$

le gradient de la transformation $\mathbf{f}$. Soit $\mathbf{k} : (x, t) \in \Omega(t) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{k}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel régulier. Soit $\Sigma(t)$ une surface orientée régulière bornée de $\mathbb{R}^3$ que l'on suit dans son mouvement. Soit $\mathbf{n}$ la normale unitaire de $\Sigma(t)$, et $\mathbf{n}_0$ la normale unitaire de $\Sigma(0)$. Alors la formule de changement de variables suivante est vérifiée :

$$\int_{\Sigma(t)} \mathbf{k}(x, t) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) = \int_{\Sigma(0)} \mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X), \quad (5.5.1)$$

où $\mathbf{CofF}$ désigne la matrice des cofacteurs de $\mathbf{F}$.

Démonstration. Nous donnons seulement l'idée de la preuve. Plus précisément, nous expliquons pourquoi l'élément de surface orientée $\mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X)$ est transformé par $\mathbf{f}$ en l'élément de surface orientée $\mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) = (\mathbf{CofF}) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X)$ dans (5.5.1).

Soit $M_0 \in \Sigma(0)$ un point matériel de la surface $\Sigma(0)$ à l'instant $t = 0$, de coordonnée de Lagrange X . Soient $\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M_0}$ deux vecteurs matériels indépendants infinitésimaux tangents à $\Sigma(0)$ au point M_0 . Soit

$$\mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X) = \overrightarrow{dM_0} \wedge \overrightarrow{\delta M_0},$$

l'élément de surface orientée de $\Sigma(0)$ déterminé par $\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M_0}$ au point M_0 .

Nous avons vu (voir (5.1.3)) que les vecteurs matériels infinitésimaux $\overrightarrow{dM_0}$ et $\overrightarrow{\delta M_0}$ sont transformés par la transformation $\mathbf{f}$ en $\overrightarrow{dM}$ et $\overrightarrow{\delta M}$ définis par

$$\overrightarrow{dM} = \mathbf{F} \overrightarrow{dM_0}, \quad \overrightarrow{\delta M} = \mathbf{F} \overrightarrow{\delta M_0}.$$

Donc l'élément de surface

$$\mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X) = \overrightarrow{dM_0} \wedge \overrightarrow{\delta M_0}$$

est transformé par $\mathbf{f}$ en l'élément de surface

$$\mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) = \overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{\delta M}.$$

On déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) &= \overrightarrow{dM} \wedge \overrightarrow{\delta M} \\ &= \mathbf{F} \overrightarrow{dM_0} \wedge \mathbf{F} \overrightarrow{\delta M_0}. \end{aligned}$$

La clé de la démonstration réside dans la formule

$$\mathbf{A} \mathbf{u} \wedge \mathbf{A} \mathbf{v} = (\mathbf{CofA})(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$$

démontrée en (1.6.4). Elle implique que

$$\mathbf{F} \overrightarrow{dM_0} \wedge \mathbf{F} \overrightarrow{\delta M_0} = \mathbf{CofF} \left(\overrightarrow{dM_0} \wedge \overrightarrow{\delta M_0} \right) = (\mathbf{CofF}) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X),$$

d'où

$$\mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) = \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X).$$

Cette équation contient deux informations :

- la normale $\mathbf{n}$ au point $M(t)$ à la surface orientée $\Sigma(t)$ est donnée en fonction de $\mathbf{F}$ et de la normale $\mathbf{n}_0$ au point $M(0)$ à la surface orientée $\Sigma(0)$ par

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0\|}. \quad (5.5.2)$$

La direction du vecteur $\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0$ caractérise l'orientation de la surface $\Sigma(t)$.

- la surface $d\mathcal{H}^2(x)$ de l'élément de surface orienté $\mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x)$ est donnée, en fonction de la surface $d\mathcal{H}^2(X)$ de l'élément de surface orienté $\mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X)$, par

$$d\mathcal{H}^2(x) = \|\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0\| d\mathcal{H}^2(X).$$

La norme du vecteur $\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0$ caractérise la variation locale de la surface en un point de $\Sigma(t)$ par rapport à sa valeur au temps $t = 0$.

□

5.6 * Dérivée particulière d'une intégrale de surface.

Nous allons montrer l'analogie de la formule (2.4.1) lorsque, au lieu de $\Omega(t)$, on considère une surface matérielle $\Sigma(t)$ que l'on suit dans son mouvement. On note $\mathbf{n}(x, t)$ une normale unitaire à $\Sigma(t)$ au point $\mathbf{x}$ et $\mathbf{n}_0(\mathbf{X})$ la normale unitaire à $\Sigma(0)$ au point $\mathbf{X}$.

Théorème 5.6.1 (Dérivée particulière d'une intégrale de surface).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{k}(x, t) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 = \int_{\Sigma(t)} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{k} + \mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2. \quad (5.6.1)$$

Le principe de la démonstration, comme pour la formule (2.4.1), consiste à se ramener par changement de variable à une intégrale sur le domaine fixe $\Sigma(0)$, à dériver par rapport au temps, puis à revenir par le changement de variables inverse à une intégrale sur $\Sigma(t)$.

Preuve du Théorème 5.6.1. On déduit de (5.5.1) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{k}(x, t) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2 &= \frac{d}{dt} \int_{\Sigma(0)} \mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\Sigma(0)} \frac{d}{dt} (\mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0) d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\Sigma(0)} \frac{d\mathbf{k}}{dt}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot (\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0) d\mathcal{H}^2 + \int_{\Sigma(0)} \mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{CofF} \right) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2. \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

En appliquant (5.5.1) à $\frac{d\mathbf{k}}{dt}$,

$$\int_{\Sigma(0)} \frac{d\mathbf{k}}{dt}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot (\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0) d\mathcal{H}^2 = \int_{\Sigma(t)} \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2. \quad (5.6.3)$$

D'après (1.6.3) et (2.4.4),

$$\mathbf{F}(\mathbf{CofF})^t = (\mathbf{CofF})^t \mathbf{F} = \mathbf{J}\mathbf{I}, \quad \mathbf{F}^t \mathbf{CofF} = \mathbf{CofF} \mathbf{F}^t = \mathbf{J}\mathbf{I}. \quad (5.6.4)$$

D'après (2.4.8) et (5.6.4) , $\frac{d}{dt} (\mathbf{F}(\mathbf{CofF})^t) = \frac{dJ}{dt} \mathbf{I} = J(\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I}$, soit

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} (\mathbf{CofF})^t + \mathbf{F} \frac{d(\mathbf{CofF})^t}{dt} = J(\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I}. \quad (5.6.5)$$

D'après (2.4.12), $\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F}$, donc d'après (5.6.4),

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} (\mathbf{CofF})^t = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} (\mathbf{CofF})^t = J \nabla \mathbf{v}. \quad (5.6.6)$$

On déduit de (5.6.5) et (5.6.6) que

$$\mathbf{F} \frac{d(\mathbf{CofF})^t}{dt} = J (\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}).$$

En transposant, on obtient

$$\frac{d\mathbf{CofF}}{dt} \mathbf{F}^t = J (\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}^t).$$

En multipliant à droite par $\mathbf{CofF}$, on trouve

$$\frac{d\mathbf{CofF}}{dt} \mathbf{F}^t \mathbf{CofF} = J (\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}^t) \mathbf{CofF}.$$

Compte tenu de (5.6.4), on déduit

$$\frac{d\mathbf{CofF}}{dt} = (\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}^t) \mathbf{CofF} = \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{CofF} - \nabla \mathbf{v}^t \mathbf{CofF}.$$

D'après (1.1.2) appliqué à $\mathbf{A} = \nabla \mathbf{v}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0$, on a

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{v}^t \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0 = \nabla \mathbf{v} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{CofF} \mathbf{n}_0).$$

Appliquant les deux équations précédentes et la formule de changement de variable (5.5.1) pour les intégrales de surfaces, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(0)} \mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{CofF} \right) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2 &= \int_{\Sigma(0)} \mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot (\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}^t) \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\Sigma(0)} (\operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} - \nabla \mathbf{v}) \mathbf{k}(\mathbf{f}(X, t), t) \cdot \mathbf{CofF} \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2 \\ &= \int_{\Sigma(t)} (\mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2, \end{aligned}$$

qui, combiné à (5.6.2) et (5.6.3), donne (5.6.1). □

Chapitre 6

Equations de l'élasticité linéaire

6.1 Notations.

Considérons un milieu continu en mouvement. La position à l'instant t d'un point matériel occupant la position $\mathbf{X}$ à l'instant 0 est notée $\mathbf{f}(X, t)$. L'application $\mathbf{f}$ est appelée la transformation. Le gradient de la transformation est noté $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(X, t) = \nabla_X \mathbf{f}(X, t), \quad F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}. \quad (6.1.1)$$

On rappelle que le tenseur des déformations de Green-Lagrange est défini par

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (6.1.2)$$

6.2 Définition générale d'un matériau élastique

Un milieu continu est dit élastique si le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ s'exprime en fonction de la position et du tenseur des déformations $\mathbf{E}$ calculé par rapport à un état de référence pour lequel les contraintes sont nulles.

Un milieu élastique est dit linéaire lorsque l'approximation linéaire de sa loi de comportement donne une description convenable de son comportement. Les équations régissant le mouvement d'un milieu élastique sont obtenues en reportant cette loi de comportement dans l'équation du mouvement

$$\rho \gamma = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega(t).$$

Mais la divergence ci-dessus est exprimée en coordonnées eulériennes rattachées au milieu physique à l'instant t ($\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \mathbf{e}_i$) tandis que le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ dépend des coordonnées Lagrangiennes X rattachées au milieu physique à l'instant initial $t = 0$. Nous sommes amenés à exprimer l'équation du mouvement en coordonnées de Lagrange. Cela nous conduira à définir un nouveau tenseur des contraintes exprimé en coordonnées de Lagrange.

6.3 Ecriture des équations du mouvement en coordonnées de Lagrange.

Rappelons que la loi fondamentale de la dynamique implique (voir (3.3.2), (3.3.4))

$$\int_{\omega(t)} \rho \gamma d\mathcal{H}^3(x) = \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{f} d\mathcal{H}^3(x) + \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) \quad \forall \omega(t) \subset \Omega(t). \quad (6.3.1)$$

Appliquant les formules de changement de variables suivantes dans les intégrales de volume et de surface

(voir (2.4.5), (5.5.1))

$$\begin{aligned} \int_{\omega(t)} k(x, t) d\mathcal{H}^3(x) &= \int_{\omega(0)} k(f(X, t), t) J(X, t) d\mathcal{H}^3(X), \\ \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{k}(x, t) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^2(x) &= \int_{\partial\omega(0)} \mathbf{k}(f(X, t), t) \cdot \mathbf{CofF}(X, t) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X), \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

où $J = \det \mathbf{F}$ et $\mathbf{CofF}$ est la matrice des cofacteurs de $\mathbf{F}$ (cf. section 1.6), on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\omega(0)} \rho(f(X, t), t) \boldsymbol{\gamma}(f(X, t), t) J(X, t) d\mathcal{H}^3(X) &= \\ \int_{\omega(0)} \rho(f(X, t), t) \mathbf{f}(f(X, t), t) J(X, t) d\mathcal{H}^3(X) &+ \int_{\partial\omega(0)} \boldsymbol{\sigma}(f(X, t), t) \mathbf{CofF}(X, t) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X) \quad \forall \omega(0) \subset \Omega(0). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Les masses de $\omega(t)$ et de $\omega(0)$ étant données, respectivement, par

$$\begin{cases} m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x, t) d\mathcal{H}^3(x) = \int_{\omega(0)} \rho(f(X, t), t) J(X, t) d\mathcal{H}^3(X), \\ m(\omega(0)) = \int_{\omega(0)} \rho(X, 0) d\mathcal{H}^3(X), \end{cases}$$

le principe de conservation de la masse entraîne $m(\omega(t)) = m(\omega(0))$, soit

$$\int_{\omega(0)} \rho(f(X, t), t) J(X, t) d\mathcal{H}^3(X) = \int_{\omega(0)} \rho(X, 0) d\mathcal{H}^3(X), \quad \forall \omega(0) \subset \Omega(0).$$

Notant

$$\rho_0(X) = \rho(X, 0), \quad (6.3.4)$$

on déduit

$$\rho(f(X, t), t) J(X, t) = \rho_0(X), \quad \forall X \in \Omega(0), \quad \forall t > 0.$$

Revenant à (6.3.3), notant

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) = \boldsymbol{\sigma}(f(X, t), t) \mathbf{CofF}(X, t), \quad \forall X \in \Omega(0), \quad \forall t > 0,$$

et (comme dans (2.3.1))

$$\boldsymbol{\gamma}(X, t) = \boldsymbol{\gamma}(f(X, t), t), \quad \mathbf{f}(X, t) = \mathbf{f}(f(X, t), t), \quad (6.3.5)$$

on obtient,

$$\int_{\omega(0)} \rho_0(X) \boldsymbol{\gamma}(X, t) d\mathcal{H}^3(X) = \int_{\omega(0)} \rho_0(X) \mathbf{f}(X, t) d\mathcal{H}^3(X) + \int_{\partial\omega(0)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) \mathbf{n}_0 d\mathcal{H}^2(X) \quad \forall \omega(0) \subset \Omega(0).$$

Appliquant la formule de Stokes, il vient

$$\int_{\omega(0)} \rho_0(X) \boldsymbol{\gamma}(X, t) d\mathcal{H}^3(X) = \int_{\omega(0)} \rho_0(X) \mathbf{f}(X, t) d\mathcal{H}^3(X) + \int_{\omega(0)} \mathbf{div}_X \hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) d\mathcal{H}^3(X) \quad \forall \omega(0) \subset \Omega(0),$$

dont on déduit l'équation du mouvement en coordonnées de Lagrange :

$$\rho_0(X) \boldsymbol{\gamma}(X, t) = \rho_0(X) \mathbf{f}(X, t) + \mathbf{div}_X \hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) \quad \forall X \in \Omega(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Le tenseur $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ n'est pas symétrique. Il est commode de le remplacer par le tenseur symétrique défini par

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J} \mathbf{Cof} \mathbf{F}^t \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Cof} \mathbf{F}. \quad (6.3.6)$$

L'équation du mouvement en coordonnées de Lagrange s'écrit alors

$$\rho_0(X) \underline{\boldsymbol{\gamma}}(X, t) = \rho_0(X) \underline{\mathbf{f}}(X, t) + \operatorname{div}_X (\mathbf{F}(X, t)) \hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) \quad \forall X \in \Omega(0), \forall t \geq 0.$$

Théorème 6.3.1. *Les équations du mouvement d'un milieu continu s'écrivent, en coordonnées de Lagrange,*

$$\rho_0 \underline{\boldsymbol{\gamma}} = \rho_0 \underline{\mathbf{f}} + \operatorname{div}_X (\mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \text{dans } \Omega(0) \times \mathbb{R}^+, \quad (6.3.7)$$

où $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$ et $\underline{\mathbf{f}}$ sont les représentations lagrangiennes de l'accélération et des forces volumiques (définies par (6.3.5)), et ρ_0 est la masse volumique du milieu à l'instant initial (cf. (6.3.4)). Le tenseur symétrique $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, appelé le **second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff**, est défini par

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.3.8)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$, appelé le **premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff**, est défini par

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t) = \boldsymbol{\sigma}(f(X, t), t) \mathbf{Cof} \mathbf{F}(X, t), \quad \forall X \in \Omega(0), \forall t > 0. \quad (6.3.9)$$

6.4 Loi de comportement d'un milieu continu élastique.

La définition d'un milieu continu élastique énoncée dans la section 6.2 se traduit mathématiquement de la manière suivante :

Définition 6.4.1 (Définition générale d'un milieu élastique). *On dit qu'un milieu continu est élastique s'il est caractérisé par une loi de comportement liant son second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (cf. (6.3.8)) à son tenseur des déformation $\mathbf{E}$ calculé par rapport à un état de référence pour lequel les contraintes sont nulles, c'est à dire une loi de comportement de la forme*

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{g}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{g}(0) = 0. \quad (6.4.1)$$

6.5 Linéarisation des équations de l'élasticité.

Les équations du mouvement (6.3.7), où $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ est donné par (6.4.1), sont très non linéaires. Il est difficile d'en obtenir des solutions. Nous allons en effectuer une linéarisation qui fournira les équations classiques de l'élasticité linéaire. Cette théorie linéarisée rend bien compte du comportement de nombreux milieux (la plupart des métaux, le bois, certains plastiques, etc...).

6.5.1 Principe de la linéarisation

On introduit le vecteur déplacement

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(X, t). \quad (6.5.1)$$

et on linéarise par rapport à $\nabla \mathbf{u}$, c'est à dire que l'on effectue des développements limités par rapport à $\nabla \mathbf{u}$ en ne conservant que les termes constants et les termes linéaires par rapport à $\nabla \mathbf{u}$. Cela revient à supposer que les composantes de $\nabla \mathbf{u}$ sont très petites, c'est à dire

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1.$$

Cette approximation est connue sous le nom de **l'hypothèse des petites perturbations** (en abrégé **h.p.p.**).

6.5.2 Tenseur des déformations linéarisées

D'après (2.4.3) et (6.5.1),

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f} = \nabla(\mathbf{u} + \mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}, \quad (6.5.2)$$

d'où, compte tenu de (6.4.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \nabla^t \mathbf{u})(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2). \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

On déduit :

Théorème 6.5.1. *Sous l'hypothèse des petites perturbations,*

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2). \quad (6.5.4)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, défini par

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})}, \quad (6.5.5)$$

est appelé le **tenseur des déformations linéarisées** du milieu continu.

6.5.3 Linéarisation de la loi de comportement

Supposons que l'application $\mathbf{g}$ apparaissant dans (6.4.1) soit différentiable à l'origine et de classe C^2 . Fixons i, j et écrivons le développement de Taylor de $g_{ij}(\mathbf{E})$ à l'ordre $N = 1$ au voisinage de 0. D'après (5.1.5), (6.4.1) et (6.5.4), compte tenu de $\mathbf{g}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\sigma}})_{ij} &= g_{ij}(\mathbf{E}) = g_{ij}(0) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial E_{kl}}(0) E_{kl} + O(|\mathbf{E}|^2) \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial E_{kl}}(0) (\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2)) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) \\ &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial E_{kl}}(0) (\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2). \end{aligned}$$

soit, en posant

$$a_{ijkl} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial E_{kl}}(0), \quad (6.5.6)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (6.5.7)$$

où ε_{kl} est défini par (6.5.5). En ne conservant que les termes linéaires, on obtient

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Definition 6.5.1. *La relation*

$$\hat{\sigma}_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (6.5.8)$$

est appelée la loi de comportement de l'élasticité linéarisée. Les coefficients a_{ijkl} définis par (6.5.6) sont appelés les coefficients d'élasticité du milieu. Du fait de la symétrie des tenseurs $\hat{\sigma}$ et $\varepsilon(\mathbf{u})$, ils satisfont les relations de symétrie

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}. \quad (6.5.9)$$

6.5.4 Expression linéarisée du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\hat{\sigma}$

On a

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}(X, t) &= (\mathbf{F}\hat{\sigma})_{ij} && \text{d'après (6.3.8)} \\ &= ((\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\hat{\sigma})_{ij} && \text{d'après (6.5.2)} \\ &= \hat{\sigma}_{ij} + (\nabla \mathbf{u}\hat{\sigma})_{ij} \\ &= \hat{\sigma}_{ij} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) && \text{d'après (6.5.8)} \\ &= a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) && \text{d'après (6.5.7).} \end{aligned}$$

En ne conservant que les termes linéaires, on obtient

$$\hat{\sigma}_{ij}(X, t) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(X, t)), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.5.10)$$

6.5.5 Expression linéarisée du tenseur des contraintes σ

On a :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(f(X, t), t) &= \left(\frac{1}{\det \mathbf{F}} \hat{\sigma}(X, t) \mathbf{F}^t \right)_{ij} && \text{d'après (6.3.9)} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} \hat{\sigma}_{im}(X, t) (\mathbf{F}^t)_{mj} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} (a_{imkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2)) \left(\delta_{mj} + \frac{\partial u_j}{\partial X_m} \right) && \text{d'après (6.5.2) et (6.5.10)} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2), \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_{ij}(f(X, t), t) = \frac{1}{\det \mathbf{F}} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2). \quad (6.5.11)$$

Linéarisons $\det \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{F} &= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} F_{ip} F_{jq} F_{kr} && \text{d'après (1.2.9)} \\
&= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \left(\delta_{ip} + \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \right) \left(\delta_{jq} + \frac{\partial u_j}{\partial X_q} \right) \left(\delta_{kr} + \frac{\partial u_k}{\partial X_r} \right) && \text{d'après (6.5.2)} \\
&= \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \frac{\partial u_i}{\partial X_p} \delta_{jq} \delta_{kr} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) && \text{idem avec (2.4.10)} \\
&= \det \mathbf{I} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjk} \frac{\partial u_i}{\partial X_p} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2} 2 \delta_{ip} \frac{\partial u_i}{\partial X_p} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) && \text{d'après (1.1.13)} \\
&= 1 + \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2),
\end{aligned}$$

soit

$$J = \det \mathbf{F} = 1 + \operatorname{div}_X \mathbf{u}(X, t) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2). \quad (6.5.12)$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(f(X, t), t) &= \frac{1}{\det \mathbf{F}} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) && \text{d'après (6.5.11)} \\
&= (1 + \operatorname{div} \mathbf{u} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2))^{-1} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) && \text{d'après (6.5.12)} \\
&= (1 - \operatorname{div} \mathbf{u} + O(|\nabla \mathbf{u}|^2)) a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2) \\
&= a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2).
\end{aligned}$$

En ne conservant que les termes linéaires, on obtient

$$\boxed{\sigma_{ij}(f(X, t), t) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.} \quad (6.5.13)$$

On conclut :

Théorème 6.5.2. *Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(f(X, t), t)$, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(X, t)$ et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\hat{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}(X, t)$ ont le même développement au premier ordre sous l'hypothèse des petites perturbations. La loi de comportement de l'élasticité linéarisée s'exprime indifféremment sous la forme (6.5.8), (6.5.10), ou (6.5.13).*

6.5.6 Linéarisation des équations du mouvement

On a

$$\gamma(X, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}(X, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(X, t)}{\partial t^2} \quad \text{d'après (2.3.1), (6.5.1).} \quad (6.5.14)$$

Les équations du mouvement d'un milieu continu données en coordonnées de Lagrange par (6.3.7), à savoir

$$\rho_0 \gamma = \rho_0 \mathbf{f} + \operatorname{div}_X (\underbrace{\mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}}}_{=\hat{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}}) \quad \text{dans } \Omega(0) \times \mathbb{R}^+,$$

s'écrivent, compte tenu de (6.5.10) et (6.5.14)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(X, t)}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{f} + \operatorname{div}_X (a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) + O(|\nabla \mathbf{u}|^2)) \quad \text{dans } \Omega(0).$$

On admettra que le terme $\operatorname{div}_X (O(|\nabla \mathbf{u}|^2))$ peut être négligé. L'équation du mouvement linéarisée s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(X, t)}{\partial t^2} &= \rho_0 \mathbf{f} + \operatorname{div}_X \boldsymbol{\sigma}^l \quad \text{dans } \Omega(0) \\
\boldsymbol{\sigma}^l(X, t) &= a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.
\end{aligned} \quad (6.5.15)$$

Remarque 6.5.1. La matrice $\boldsymbol{\sigma}^l$ est le tenseur des contraintes linéarisé. Les équations (6.5.8), (6.5.10), (6.5.13) et (6.5.15) montrent qu'en élasticité linéarisée, il n'y a pas lieu de distinguer $\boldsymbol{\sigma}$ de $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}$ ou $\boldsymbol{\sigma}^l$. Dans la suite du cours, pour simplifier, ces quatre tenseurs seront notés $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{\sigma}^l = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{dans l'approximation linéaire.} \quad (6.5.16)$$

6.5.7 Conditions aux limites linéarisées

Si les forces sont données sur une partie $\Gamma_1(t)$ de la frontière $\partial\Omega(t)$ de $\Omega(t)$ par une densité surfacique $\vec{F}(x)$, on a

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t)\mathbf{n}(x, t) = \vec{F}(x) \quad \text{sur } \Gamma_1(t). \quad (6.5.17)$$

A l'instant $t = 0$, les points matériels de $\Gamma_1(t)$ occupent une portion $\Gamma_1(0)$ de $\partial\Omega(0)$, et la normale extérieure $\mathbf{n}_0(X)$ est donnée en fonction de $\mathbf{n}(x, t) = \mathbf{n}(f(X, t), t)$ par la formule (5.5.2), c'est à dire par

$$\mathbf{n}(f(X, t), t) = \frac{\mathbf{Cof}\mathbf{F}(X, t)\mathbf{n}_0(X)}{|\mathbf{Cof}\mathbf{F}(X, t)\mathbf{n}_0(X)|}. \quad (6.5.18)$$

Or,

$$\begin{aligned} (\mathbf{Cof}\mathbf{F})_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}F_{mp}F_{nq} && \text{d'après (1.6.2)} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})_{mp}(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})_{nq} && \text{d'après (6.5.2)} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}\left(\delta_{mp} + \frac{\partial u_m}{\partial X_p}\right)\left(\delta_{nq} + \frac{\partial u_n}{\partial X_q}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}\delta_{mp}\delta_{nq} + O(|\nabla\mathbf{u}|) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jmn} + O(|\nabla\mathbf{u}|) \\ &= \delta_{ij} + O(|\nabla\mathbf{u}|) && \text{d'après (1.1.13),} \end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{Cof}\mathbf{F} = (1 + O(|\nabla\mathbf{u}|))\mathbf{I}. \quad (6.5.19)$$

On déduit de (6.5.18) et (6.5.19) que

$$\mathbf{n}(f(X, t), t) = (1 + O(|\nabla\mathbf{u}|))\mathbf{n}_0(X).$$

La condition aux limites $\boldsymbol{\sigma}(x, t)\mathbf{n}(x, t) = \vec{F}(x)$ sur $\Gamma_1(t)$ (cf. (6.5.20)) s'écrit donc dans l'approximation linéaire,

$$\boldsymbol{\sigma}(f(X, t), t)\mathbf{n}_0(X) = \vec{F}(f(X, t)) \quad \text{sur } \Gamma_1(0). \quad (6.5.20)$$

On peut donc écrire les conditions aux limites indifféremment sur le bord $\partial\Omega(t)$ ou sur le bord $\partial\Omega(0)$.

6.5.8 Lien entre dérivées par rapport aux variables de Lagranges et dérivées par rapport aux variables d'Euler dans l'approximation linéaire

Considérons une grandeur physique scalaire de représentation eulérienne $\psi(x, t)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_i}(\psi(f(X, t), t)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(f(X, t), t)\right)\frac{\partial f_j(X, t)}{\partial X_i} \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)(f(X, t), t)F_{ji} && \text{d'après (6.1.1)} \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)(f(X, t), t)\left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) && \text{d'après (6.5.2)} \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)(f(X, t), t)(1 + O(|\nabla\mathbf{u}|)). \end{aligned}$$

Donc, dans l'approximation linéaire, il n'y a pas lieu de distinguer les dérivées partielles par rapport aux variables de Lagrange des dérivées partielles par rapport aux variables d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \psi(f(X, t), t) \simeq \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) (f(X, t), t) \quad \text{dans l'approximation linéaire.} \quad (6.5.21)$$

6.5.9 Équations de l'élasticité linéaire

Supposons que l'on connaisse la densité $\vec{F}$ des forces appliquées sur la frontière $\partial\Omega$ du milieu continu élastique linéaire occupant à $t = 0$ le domaine $\Omega (= \Omega(0))$. Compte tenu de (6.5.15), (6.5.16), (6.5.20), et (6.5.21) les équations gouvernant le comportement du milieu continu élastique linéaire s'écrivent

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f} & \text{dans } \Omega, \quad (\text{équations du mouvement}) \\ \sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), & (\text{loi de comportement}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}), & (\text{tenseur des déformations linéarisées}) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \vec{F} & \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{conditions aux limites}). \end{cases} \quad (6.5.22)$$

6.6 Conséquence de l'existence d'une énergie interne de déformation

En l'absence d'effets thermiques, c'est à dire lorsque les apports volumiques de chaleur par unité de temps ρw et le vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}$ sont négligés, l'énergie interne spécifique e vérifie l'équation (voir (3.5.2))

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\mathbf{v}, \quad (6.6.1)$$

où $\mathbf{D}\mathbf{v}$ est le tenseur des vitesses de déformation défini par la formule (3.5.1), c'est à dire

$$\mathbf{D}\mathbf{v} := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v}).$$

D'après (6.5.21), dans le cadre de l'élasticité linéaire, les dérivées par rapport aux variables de Lagrange X_i sont approximativement égales aux dérivées par rapport aux variables d'Euler x_i . Compte tenu de (6.5.5), on déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\nabla_X \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \nabla_X^t \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^t \mathbf{u}) \\ &= \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

D'après (6.6.1) et (6.6.2), en l'absence d'effets thermique, l'énergie interne spécifique e du milieu élastique linéaire vérifie l'équation

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \quad (6.6.3)$$

Si l'énergie interne spécifique e est uniquement une énergie interne de déformation, c'est à dire uniquement une fonction de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$, on a

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}. \quad (6.6.4)$$

On déduit de (6.6.3) et (6.6.4) que

$$\left(\rho \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \frac{d}{dt} \varepsilon_{ij} = 0, \quad (6.6.5)$$

ce qui fournit l'expression suivante des composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de l'énergie spécifique e :

$$\boxed{\rho \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.} \quad (6.6.6)$$

Compte tenu de (6.5.16),

$$\rho \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.6.7)$$

En dérivant par rapport à ε_{kh} on obtient l'expression suivante des coefficients d'élasticité a_{ijkh} en fonction de l'énergie spécifique e :

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kh}} = a_{ijkh} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}.} \quad (6.6.8)$$

D'après le théorème de Schwarz, on a $\frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kh}} = \frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{kh} \partial \varepsilon_{ij}}$, donc

$$a_{ijkh} = a_{khij} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.6.9)$$

Compte tenu de (6.5.9), les coefficients d'élasticité vérifient les relations de symétrie suivantes :

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk} = a_{khij} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.6.10)$$

Si maintenant on intègre (6.6.7), ce qui, grâce à (6.6.9) et au lemme de Poincaré 1.7.1, devient possible, on obtient

$$e = \frac{1}{2\rho} a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh}. \quad (6.6.11)$$

On a donc établi le théorème suivant :

Théorème 6.6.1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une énergie de déformation e en élasticité linéarisée est que les coefficients d'élasticité satisfassent*

$$a_{ijkh} = a_{khij} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.6.12)$$

Compte tenu de (6.5.9), les coefficients d'élasticité satisfont

$$\boxed{a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk} = a_{khij} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}.} \quad (6.6.13)$$

En l'absence d'effets thermiques, on a

$$\boxed{e = \frac{1}{2\rho} a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon},} \quad (6.6.14)$$

et

$$\boxed{\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \rho \frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kh}} = a_{ijkh} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\}.} \quad (6.6.15)$$

6.7 Isotropie. Loi de Hooke

6.7.1 Définition d'un milieu élastique isotrope

Si, en un point $\mathbf{X}$, le milieu a les mêmes propriétés quelles que soient les directions autour de $\mathbf{X}$, on dit qu'il est isotrope. Considérons un milieu élastique, linéaire ou non. La loi de comportement d'un milieu élastique dit que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction du tenseur des déformations $\mathbf{E}$: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E})$. La propriété d'isotropie s'exprime en disant que si, dans une base orthonormée $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3)$, le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ donné par

$$\mathbf{E} = E_{ij} \boldsymbol{\nu}_i \otimes \boldsymbol{\nu}_j, \quad (6.7.1)$$

est associé au tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}) = \sigma_{ij} \boldsymbol{\nu}_i \otimes \boldsymbol{\nu}_j, \quad (6.7.2)$$

alors dans tout autre base orthonormée $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, le tenseur des déformations

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_{ij} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j, \quad (6.7.3)$$

est associée au tenseur des contraintes

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{ij} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j. \quad (6.7.4)$$

Autrement dit,

$$\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{E}}) = \sigma_{ij} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j. \quad (6.7.5)$$

Définition 6.7.1. Soit Ω un milieu élastique linéaire ou non linéaire et soit X un point matériel de Ω . On note $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E})$ la loi de comportement élastique du milieu au point X . On dit que le milieu matériel est isotrope au point X si et seulement si, quels que soient les nombres réels E_{ij} et σ_{ij} avec $E_{ij} = E_{ji}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $i, j \in \{1, 2, 3\}$, et quelle que soit la base orthonormée $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{\sigma}(E_{ij} \boldsymbol{\nu}_i \otimes \boldsymbol{\nu}_j) = \sigma_{ij} \boldsymbol{\nu}_i \otimes \boldsymbol{\nu}_j \implies \boldsymbol{\sigma}(E_{ij} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j) = \sigma_{ij} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j \quad \text{pour toute base orthonormée } (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3).$$

Exercice

Soient $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3)$ et $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$ et soient $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ définies respectivement par (6.7.1), (6.7.2), (6.7.3), (6.7.4). Soit, en utilisant la convention de sommation des indices répétés,

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\nu}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

1. Montrer que $\mathbf{Q}$ transforme la base orthonormée $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ en la base orthonormée $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3)$.
2. Montrer que $\mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.
3. Vérifier en utilisant (1.1.4) que

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{Q}^t \mathbf{E} \mathbf{Q}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}) \mathbf{Q}.$$

4. En déduire que le milieu élastique est isotrope si et seulement si, quelle que soit la matrice orthogonale $\mathbf{Q}$ et le tenseur des déformations $\mathbf{E}$, on a

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Q}^t \mathbf{E} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}) \mathbf{Q}, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^t = \mathbf{I}.$$

L'exercice ci-dessus nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 6.7.1. Un matériau élastique linéaire ou non est isotrope en un point X si et seulement si sa loi de comportement $\mathbf{E} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E})$ vérifie

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Q}^t \mathbf{E} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}) \mathbf{Q}, \quad (6.7.6)$$

quelles que soient la matrice orthogonale $\mathbf{Q}$ et la matrice symétrique $\mathbf{E}$.

6.7.2 Énergie élastique d'un milieu élastique linéaire isotrope

Lemme 6.7.1. *Dans un matériau élastique linéaire isotrope, l'énergie élastique vérifie*

$$e(\mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}) = e(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (6.7.7)$$

Démonstration. Compte tenu de (6.6.14) et de (6.7.6), on a

$$\begin{aligned} e(\mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}) &= \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q}) : \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q} = \frac{1}{2\rho} \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q} : \mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q} = \frac{1}{2\rho} (\mathbf{Q}^t \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Q})_{ij} (\mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q})_{ij} \\ &= \frac{1}{2\rho} Q_{ip}^t \sigma_{pq} Q_{qj} Q_{ir}^t \varepsilon_{rs} Q_{sj} = \frac{1}{2\rho} (Q_{ip}^t Q_{ir}^t) (Q_{qj} Q_{sj}) \sigma_{pq} \varepsilon_{rs} \\ &= \frac{1}{2\rho} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^t)_{rp} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^t)_{qs} \sigma_{pq} \varepsilon_{rs} = \frac{1}{2\rho} \delta_{pr} \delta_{qs} \sigma_{pq} \varepsilon_{rs} = \frac{1}{2\rho} \sigma_{pq} \varepsilon_{pq} = e(\boldsymbol{\varepsilon}). \end{aligned}$$

□

Lemme 6.7.2. *Dans un matériau élastique linéaire isotrope, l'énergie élastique s'écrit*

$$e = \frac{1}{2\rho} ((a - b) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + b(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2), \quad (6.7.8)$$

où

$$a := a_{1111} = a_{2222} = a_{3333}; \quad b := a_{1122} = a_{1133} = a_{2233}. \quad (6.7.9)$$

Démonstration. Compte tenu de sa symétrie, la matrice $\boldsymbol{\varepsilon}$ admet une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Il existe donc une matrice $\mathbf{Q}$ orthogonale, c'est à dire

vérifiant (6.7.6), telle que $\mathbf{Q}^t \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$. On déduit de (6.7.6) que

$$e(\boldsymbol{\varepsilon}) = e \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \right),$$

puis de (6.6.14), en remarquant que $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_j$ (sans sommation), et en tenant compte de

(6.6.9), que, posant $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, (dans les équations suivantes, nous n'utilisons pas la convention de sommation des indices répétés)

$$\begin{aligned} e &= \sum_{i,j,k,h=1}^3 \frac{1}{2\rho} a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} = \sum_{i,j,k,h=1}^3 \frac{1}{2\rho} a_{ijkh} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{kh} \\ &= \frac{1}{2\rho} \sum_{i,j,k,h=1}^3 a_{ijkh} \delta_{ij} \varepsilon_j \delta_{kh} \varepsilon_h = \frac{1}{2\rho} \sum_{i,k=1}^3 a_{iikk} \varepsilon_i \varepsilon_k \\ &= \frac{1}{2\rho} (a_{1111} \varepsilon_1^2 + a_{2222} \varepsilon_2^2 + a_{3333} \varepsilon_3^2 + 2a_{1122} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2a_{1133} \varepsilon_1 \varepsilon_3 + 2a_{2233} \varepsilon_2 \varepsilon_3). \end{aligned} \quad (6.7.10)$$

Dans la formule ci-dessus, l'ordre des valeurs propres est indifférent, i.e.

$$e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = e(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2) = e(\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3) = e(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1) = e(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = e(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3.$$

Il en résulte que $a_{1111} = a_{2222} = a_{3333}$ et $a_{1122} = a_{1133} = a_{2233}$. Posant

$$a := a_{1111} = a_{2222} = a_{3333}; \quad b := a_{1122} = a_{1133} = a_{2233}, \quad (6.7.11)$$

on déduit de (6.7.10) que

$$e = \frac{1}{2\rho} (a(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + 2b(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3)). \quad (6.7.12)$$

Remarquant que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; & \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2, \\ (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3), \end{aligned} \quad (6.7.13)$$

on déduit

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3) &= (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2). \end{aligned}$$

Reportant dans (6.7.12), on obtient

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2\rho} (a \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + b((\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2))) \\ &= \frac{1}{2\rho} ((a - b) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + b(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

6.7.3 Loi de comportement d'un milieu élastique linéaire isotrope : Loi de Hooke. Coefficients de Lamé.

Théorème 6.7.1 (loi de Hooke). *Dans un matériau élastique linéaire isotrope, le tenseur des contraintes s'écrit*

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.7.14)$$

et l'énergie spécifique est donnée par

$$e = \frac{1}{2\rho} (\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)). \quad (6.7.15)$$

*La loi de comportement (6.7.14) est appelée la **loi de Hooke**. Les coefficients λ , μ sont appelés les **coefficients de Lamé**. Ils sont donnés par (cf. (6.7.11))*

$$\lambda = b = a_{1122}; \quad \mu = \frac{a - b}{2} = \frac{a_{1111} - a_{1122}}{2}. \quad (6.7.16)$$

Démonstration. D'après le lemme 6.7.2, l'énergie interne spécifique d'un milieu élastique linéaire isotrope est donnée, lorsque l'on néglige les effets thermiques, par

$$e = \frac{1}{2\rho} ((a - b) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + b(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2) = \frac{1}{2\rho} ((a - b)\varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq} + b\varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq}), \quad (6.7.17)$$

où

$$a := a_{1111} = a_{2222} = a_{3333}; \quad b := a_{1122} = a_{1133} = a_{2233}.$$

D'après le théorème 6.6.1, le tenseur des contraintes d'un milieu élastique linéaire est donné par (voir la formule (6.6.15))

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

On déduit

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{1}{2\rho} ((a-b)\varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq} + b\varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((a-b) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq}) + b \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq}) \right) \\ &= \frac{1}{2} ((a-b)2\delta_{ip}\delta_{jq}\varepsilon_{pq} + b(2\delta_{ij}\varepsilon_{qq})) \\ &= (a-b)\varepsilon_{ij} + b\delta_{ij} \operatorname{tr} \varepsilon \end{aligned}$$

autrement dit,

$$\boldsymbol{\sigma} = b(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + (a-b)\boldsymbol{\varepsilon}.$$

En introduisant les coefficients de Lamé

$$\lambda = b; \quad \mu = \frac{a-b}{2},$$

on obtient la loi de Hooke (6.7.14). Revenant à (6.7.17), on trouve

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2\rho} ((a-b) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) + b(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2) \\ &= \frac{1}{2\rho} (\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)), \end{aligned}$$

soit (6.7.15). □

6.7.4 Calcul des coefficients d'élasticité d'un matériau élastique linéaire isotrope en fonction des coefficients de Lamé

D'après (6.6.8) et (6.7.15) on a, $\forall i, j, k, h$,

$$\begin{aligned} a_{ijkh} &= \rho \frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kh}} && \text{d'après (6.6.8)} \\ &= \rho \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kh}} \left(\frac{1}{2\rho} (\lambda(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)) \right) && \text{d'après (6.7.15)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kh}} (\lambda \varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq} + 2\mu \varepsilon_{pq}\varepsilon_{pq}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(2\lambda \frac{\partial \varepsilon_{pp}}{\partial \varepsilon_{kh}} \varepsilon_{qq} + 4\mu \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial \varepsilon_{kh}} \varepsilon_{pq} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} (\lambda \delta_{kh} \varepsilon_{qq} + 2\mu \delta_{pk} \delta_{qh} \varepsilon_{qp}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} (\lambda \delta_{kh} \varepsilon_{qq} + 2\mu \varepsilon_{hk}) \\ &= \lambda \delta_{kh} \frac{\partial \varepsilon_{qq}}{\partial \varepsilon_{ij}} + 2\mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{\varepsilon_{hk} + \varepsilon_{kh}}{2} \right) \\ &= \lambda \delta_{kh} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jh}}{2} \right), \end{aligned}$$

soit

$$a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (6.7.18)$$

En particulier,

$$\begin{array}{ll}
 a_{ijij} = a_{ijji} = \mu & \forall i \neq j, \quad (\text{sans sommation des indices répétés}) \\
 a_{iijj} = \lambda & \forall i \neq j, \quad (\text{sans sommation des indices répétés}) \\
 a_{iiii} = \lambda + 2\mu & \forall i, \quad (\text{sans sommation des indices répétés}) \\
 a_{ijkl} = 0 & \text{si } \text{card } \{i, j, k, l\} \geq 3.
 \end{array}$$

Chapitre 7

Existence et unicité de la solution d'un problème d'élasticité linéaire

7.1 Exemple 1 : Problème d'équilibre avec condition aux limites de Dirichlet homogènes.

Nous cherchons un champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant le problème d'équilibre déduit de (6.5.22) en remplaçant $\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}$ par zéro la condition au bord $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \vec{F}$ sur $\partial\Omega$ (dite "condition aux limites de Neumann") par la condition au bord (dite "condition aux limites de Dirichlet homogène") $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}), & \text{(noté } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}), \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.1.1)$$

lorsque la condition

$$\begin{aligned} a_{ijkh} S_{ij} S'_{kh} &\leq C |\mathbf{S}| |\mathbf{S}'|, \quad \forall \mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \mathbb{S}_3 \quad (C > 0) \\ a_{ijkh} S_{ij} S_{kh} &\geq \alpha S_{ij} S_{ij}, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathbb{S}_3 \quad (\alpha > 0) \quad (\text{condition d'ellipticité}) \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

est vérifiée.

7.1.1 Espace de Hilbert $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. Inégalités de Poincaré et de Korn. Théorème de Lax Milgram.

On rappelle que l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, g_3 \in L^2(\Omega), \\ \int_{\Omega} f \varphi_{,i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \right\}. \quad (7.1.3)$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, les fonctions g_i sont unique et notée $g_i = u_{,i}$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ est défini par

$$H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) = \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad u_i \in H^1(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \}. \quad (7.1.4)$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est associé au produit scalaire et à la norme

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v d\mathcal{H}^3,$$

$$\|u\|_{H^1} = (u, u)_{H^1} = \sqrt{\int_{\Omega} |u|^2 + |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^3}.$$

qui lui donnent une structure d'espace de Hilbert. On définit de même l'espace de Sobolev $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$: il est associé au produit scalaire et à la norme

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{H}^3,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{H^1} = \sqrt{\int_{\Omega} (|\mathbf{u}|^2 + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}) d\mathcal{H}^3}.$$

qui lui donnent aussi une structure d'espace de Hilbert. Si la frontière de Ω est assez régulière, on peut définir les valeurs prises par un élément $\mathbf{u}$ de $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ sur le bord $\partial\Omega$. La restriction de $\mathbf{u}$ à $\partial\Omega$ est appelée la trace de $\mathbf{u}$ et notée $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$. Elle vérifie $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} \in L^2_{\mathcal{H}^2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3)$. On peut employer la formule de Stokes avec les éléments de $H^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. On note

$$H^1_0(\Omega; \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{u}|_{\Omega} = 0\}. \quad (7.1.5)$$

Lemme 7.1.1 (Inégalité de Poincaré.). *Si Ω est borné, il existe $C > 0$ tel que*

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mathcal{H}^3 \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^3 \quad \forall u \in H^1_0(\Omega). \quad (7.1.6)$$

Démonstration. On utilisera l'inégalité de Jensen :

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt \right|^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b u^2(t) dt \quad \forall u \in C([a, b]). \quad (7.1.7)$$

Soit L tel que $\Omega \subset (-L, L)^3$ et $u \in C^1_c(\Omega)$ prolongée par 0 sur $(-L, L)^3 \setminus \Omega$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^2 d\mathcal{H}^3 &= \int_{(-L, L)^3} |u|^2 d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{(-L, L)^3} \left| \int_{-L}^{x_1} u_{,1}(t, x_2, x_3) dt \right|^2 d\mathcal{H}^3 \\ &\leq \int_{(-L, L)^3} \left(\int_{-L}^L |u_{,1}(t, x_2, x_3)| dt \right)^2 d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{(-L, L)^3} 4L^2 \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |u_{,1}(t, x_2, x_3)| dt \right)^2 d\mathcal{H}^3 \\ &\leq \int_{(-L, L)^3} 2L \int_{-L}^L |u_{,1}(t, x_2, x_3)|^2 dt dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{d'après (7.1.7)}) \\ &= 4L^2 \int_{(-L, L)^2} \int_{-L}^L |u_{,1}(t, x_2, x_3)|^2 dt dx_2 dx_3 \quad (\text{en intégrant par rapport à } x_1) \\ &= 4L^2 \int_{(-L, L)^3} |u_{,1}|^2 d\mathcal{H}^3 \\ &\leq 4L^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^3 \quad \forall u \in H^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

□

Lemme 7.1.2 (Inégalité de Korn.).

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathcal{H}^3 \leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathcal{H}^3 \quad \forall \mathbf{u} \in C_c^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \quad (7.1.8)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathcal{H}^3 \leq 2 \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathcal{H}^3 \quad \forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (7.1.9)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathcal{H}^3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) d\mathcal{H}^3 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} u_{i,j} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i,j} u_{j,i} d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2} u_{i,j,i} u_j d\mathcal{H}^3 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} u_{i,i} u_{j,j} d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 d\mathcal{H}^3 \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathcal{H}^3. \end{aligned}$$

□

Théorème 7.1.1 (théorème de Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert et $a : (u, v) \in H \times H$ une forme bilinéaire continue coercive sur H , c'est à dire vérifiant*

$$\begin{aligned} &\left. \begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \\ a(w, \lambda u + \mu v) &= \lambda a(w, u) + \mu a(w, v) \end{aligned} \right\} \quad \forall u, v, w \in H, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{bilinéarité} \\ &\exists C > 0, \quad |a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H \quad \text{continuité} \\ &\exists c > 0, \quad |a(u, u)| \geq c \|u\|_H^2 \quad \text{coercivité.} \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Soit $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H , c'est à dire vérifiant

$$\begin{aligned} &L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) \quad \text{linéarité} \\ &\exists C > 0, \quad |L(u)| \leq C \|u\|_H \quad \forall u \in H \quad \text{continuité.} \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

Alors il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H. \quad (7.1.12)$$

De plus, si a est symétrique, c'est à dire si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in H. \quad (7.1.13)$$

alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \right\}. \quad (7.1.14)$$

Pour la preuve, voir [2][p. 84].

7.1.2 Application au problème (7.1.1) (voir aussi [2][paragraphe IX.5])

Si $\mathbf{u}$ est solution de (7.1.1), on a

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ &\int_{\Omega} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stokes, (en utilisant la convention de sommation des indices répétés)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 &= \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) v_i d\mathcal{H}^3 \\
&= \int_{\Omega} -(\sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i)_{,j} + \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_{i,j} d\mathcal{H}^3 \\
&= \int_{\partial\Omega} -\sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_i n_j d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_{i,j} d\mathcal{H}^3 \\
&= \int_{\partial\Omega} -(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 \tag{7.1.15} \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 \quad \text{car } \mathbf{v}|_{\Omega} = 0 \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 \quad \text{car } \boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma} \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 \quad \text{d'après (7.1.1),}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \\
\int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \tag{7.1.16}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{u}$ vérifie (7.1.12) avec

$$H = H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3, \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Vérifions que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (théorème (7.1.1)) sont satisfaites. Les deux premières ligne de (7.1.10) sont faciles à vérifier. D'après (7.1.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 \leq C \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})| |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})| d\mathcal{H}^3 \\
&\leq C \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathcal{H}^3} \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 d\mathcal{H}^3} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

donc la troisième ligne de (7.1.10) est vérifiée. D'après (7.1.2), (7.1.9), et (7.1.6),

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathcal{H}^3 \geq C \int_{\Omega} |\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})|^2 d\mathcal{H}^3 \geq C \int_{\Omega} |\nabla(\mathbf{u})|^2 d\mathcal{H}^3 \geq C \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathcal{H}^3$$

où la constante $C > 0$ peut varier d'une inégalité à l'autre. Donc la quatrième ligne de (7.1.10) est vérifiée. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (7.1.11) est vérifiée. D'après le théorème 7.1.1, le problème (7.1.16) admet une solution unique $\mathbf{u}$, caractérisée, puisque $a(., .)$ est symétrique, par

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \text{et} \\
\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathcal{H}^3 - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{H}^3 &= \min_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Inversement, si $\mathbf{u}$ est solution de (7.1.16), d'après (7.1.15)

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad (\text{au sens des distributions})$$

donc $-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{f}$ dans Ω au sens des distributions et $\mathbf{u}$ est solution de (7.1.1) au sens des distributions. On peut montrer (voir [2][Chapitre IX]) que si $\rho \mathbf{f}$ et les coefficients a_{ijkl} sont assez régulières, par exemple de classe C^∞ et si le bord $\partial\Omega$ à une forme régulière, alors cette solution $\mathbf{u}$ est de classe C^2 , et est une solution au sens "classique" de (7.1.1).

7.2 Exemple 2 : Problème d'équilibre avec condition aux limites de Dirichlet inhomogènes.

Nous cherchons un champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant le problème d'équilibre déduit de (7.1.1) en remplaçant la condition au bord $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ par la condition au bord (dite "condition aux limites de Dirichlet non homogène") $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) = \rho\mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}), & (\text{noté } \sigma = \mathbf{a}\varepsilon(\mathbf{u})) \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}), \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.2.1)$$

Elle est donnée par

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{g},$$

où $\mathbf{u}_0$ est la solution déduite de (7.1.1) en remplaçant $\rho\mathbf{f}$ par $\rho\mathbf{f} - \operatorname{div}\sigma(\mathbf{g})$.

7.3 Exemple 3 : Problème d'équilibre avec condition aux limites mixtes de Dirichlet homogènes et de Neumann homogènes.

Nous cherchons un champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant le problème d'équilibre déduit de (7.1.1) en remplaçant la condition au bord $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ par les conditions au bord mixtes $\mathbf{u} = 0$ sur Γ_0 (Dirichlet homogène), et $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_1 (Neumann homogène), où $\partial\Omega$ est la réunion disjointe de Γ_0 et Γ_1 , et $\mathcal{H}^2(\Gamma_0) > 0$, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) = \rho\mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}), & (\text{noté } \sigma = \mathbf{a}\varepsilon(\mathbf{u})) \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}), \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (7.3.1)$$

Si $\mathbf{u}$ est solution de (7.3.1), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3) := \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{u}|_{\Omega} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0\}, \\ \int_{\Omega} -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 &= \int_{\Omega} \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stokes, $\forall \mathbf{v} \in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, (en utilisant la convention de sommation des indices répétés)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 &= \int_{\Omega} -\sigma_{ij,j}(\mathbf{u})v_i d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\Omega} -(\sigma_{ij}(\mathbf{u})v_i)_{,j} + \sigma_{ij}(\mathbf{u})v_{i,j} d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\partial\Omega} -\sigma_{ij}(\mathbf{u})v_i n_j d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})v_{i,j} d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\partial\Omega} -(\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^2 + \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{v} d\mathcal{H}^3 \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{a}\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 \quad \text{car } \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad \text{et } \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Donc $\mathbf{u}$ vérifie (7.1.12) avec

$$H = \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3, \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

On peut montrer que les inégalités de Korn et de Poincaré sont aussi vérifiées dans $\tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$. En répétant le raisonnement de la section (7.1.2), on déduit que le problème (7.3.3) admet une solution unique $\mathbf{u}$, caractérisée, puisque $a(., .)$ est symétrique, par

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \text{et} \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathcal{H}^3 - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\mathcal{H}^3 &= \min_{\mathbf{v} \in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathcal{H}^3 - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \right\}. \end{aligned}$$

Inversement, si $\mathbf{u}$ est solution de (7.3.3), d'après (7.3.2)

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3 = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{H}^3, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{H}_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

donc $-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{f}$ dans Ω et $\mathbf{u}$ est solution de (7.3.1).

Chapitre 8

Problèmes d'élasticité linéaire

8.1 Problème 1 : compression uniforme

8.1.1 Enoncé du problème et mise en équation

Soit un corps élastique, homogène, isotrope, qui occupe une région Ω . On suppose que ce corps élastique est plongé dans un gaz à pression constante p . On néglige les forces volumiques (pesanteur). On suppose que ce corps est en équilibre. On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire.

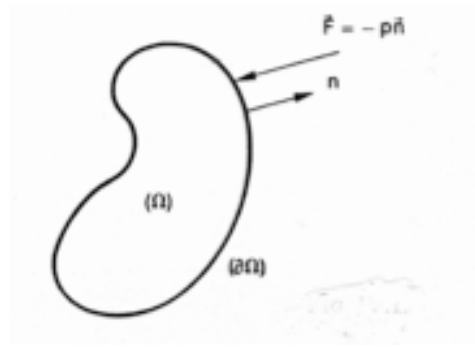


FIGURE 8.1 –

1. Quelle est la loi de comportement satisfaite par ce corps élastique ?
2. Ecrire les équations d'équilibre, les conditions aux limites.

8.1.2 Solution du problème et conséquences

1. Montrer que la matrice constante $\sigma = -p\mathbf{I}$ vérifie les équations aux limites et les conditions aux limites.
2. Exprimer le tenseur d'élasticité linéarisé en fonction du tenseur des contraintes $\sigma = -p\mathbf{I}$.
Réponse : $\varepsilon = -\frac{p}{3\lambda+2\mu}\mathbf{I}$.
3. Montrer que le champ de déplacements $\mathbf{u}$ défini par $u_i = \frac{-p}{3\lambda+2\mu}x_i$ est associé au tenseur d'élasticité linéarisé obtenu dans la question précédente.
4. On note $V_t = \mathcal{H}^3(\Omega(t))$. Montrer que

$$V_t - V_0 = \int_{\Omega(0)} \det \mathbf{F} - 1 d\mathcal{H}^3. \quad (8.1.1)$$

Indication : utiliser la formule de changement de variables (2.4.5) avec $k = 1$. On rappelle que le volume d'un ensemble Ω est donné par $\mathcal{H}^3(\Omega) = \int_{\Omega} d\mathcal{H}^3$.

5. En déduire que dans l'hypothèse des petites perturbations,

$$\frac{V_t - V_0}{V_0} \simeq \frac{1}{V_0} \int_{\Omega(0)} \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathcal{H}^3. \quad (8.1.2)$$

6. Calculer $\frac{V - V_0}{V_0}$.

Réponse : $\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{-3p}{3\lambda + 2\mu} = \frac{-p}{K}$, où $K := \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$ est appelé le module de rigidité à la compression.

Remarque 8.1.1. *L'expérience (et le bon sens) fait apparaître que l'application d'une pression (positive) ne peut entraîner qu'une diminution de volume, ce qui impose*

$$3K = 3\lambda + 2\mu > 0. \quad (8.1.3)$$

8.2 Problème 2 : traction simple

8.2.1 Enoncé du problème

Soit une poutre cylindrique de longueur L , constituée d'un matériau élastique, homogène, isotrope, et limitée par deux sections droites Γ_0 et Γ_1 . On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire. On rapporte la poutre à un système de coordonnées orthonormées tel que Γ_0 soit dans le plan $(0, x_2, x_3)$ et Γ_1 dans le plan d'équation $x_1 = L$ (voir figure).

La poutre est soumise à des forces de traction $\vec{F}$ sur Γ_1 et $-\vec{F}$ sur Γ_0 , parallèles à l'axe du cylindre $(O, \mathbf{e}_1)$. On suppose que ces forces sont uniformément réparties sur les bases, de sorte que la base Γ_1 est soumise à une densité de forces $(F, 0, 0)$ et Γ_0 à une densité de forces $(-F, 0, 0)$, avec

$$(F, 0, 0) = \frac{\vec{F}}{S},$$

où S est l'aire de la section droite. La surface latérale Γ_l n'est soumise à aucune forces et les forces volumiques sont nulles.

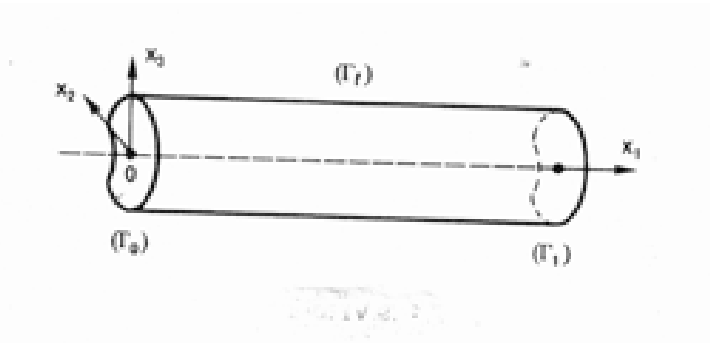


FIGURE 8.2 –

8.2.2 Mise en équations

1. Ecrire les équations d'équilibre, la loi de comportement, et les équations traduisant les conditions aux limites.

2. Montrer les équations traduisant les conditions aux limites peuvent se simplifier en

$$\begin{cases} \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \sigma_{11} = F, \quad \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \sigma_{11} = F, \quad \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (8.2.1)$$

8.2.3 Résolution

1. Vérifier que le champ des contraintes constant défini par

$$\sigma_{11} = F, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0, \quad (8.2.2)$$

satisfait les équations d'équilibre et les conditions aux limites (8.2.1).

2. Déterminer le tenseur des déformations linéarisé $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$ donné par (8.2.1) et des coefficients de Lamé.

Réponse :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F,$$

et les trois autres composantes sont nulles.

3. Vérifier que le champ de déplacements

$$u_1 = \varepsilon_{11}x_1, \quad u_2 = \varepsilon_{22}x_2, \quad u_3 = \varepsilon_{33}x_3,$$

est un champ de déplacements solution.

8.2.4 Analyse de la solution obtenue. Module de Young.

1. L'allongement ΔL de la barre est donné par le déplacement du point $(L, 0, 0)$. Montrer que

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{E}, \quad E := \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}. \quad (8.2.3)$$

Le coefficient E défini ci-dessus est appelé le **module d'Young**. C'est un module de rigidité à l'allongement. L'allongement est d'autant plus petit que E est grand. L'expérience (et le bon sens) montre que le module de Young est toujours positif, i.e.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} > 0. \quad (8.2.4)$$

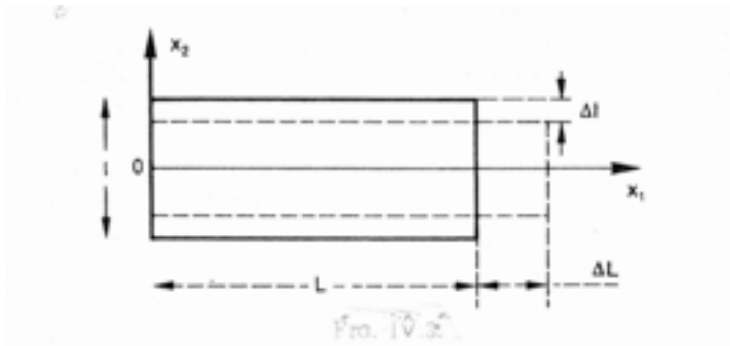


FIGURE 8.3 –

8.2.5 Coefficient de Poisson.

En même temps que la poutre s'allonge, ses dimensions transversales diminuent car

$$u_2 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}Fx_2, \quad u_3 = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}Fx_3.$$

On appelle coefficient de Poisson le nombre ν défini par

$$\nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (8.2.5)$$

1. Soit l le diamètre de la poutre avant déformation et soit $l + \Delta l$ son diamètre après déformation (voir figure 8.3). Montrer que

$$\frac{\Delta l}{l} = -\nu \frac{\Delta L}{L}.$$

2. L'expérience (et le bon sens) montre que le coefficient de Poisson est toujours positif, i.e.

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > 0. \quad (8.2.6)$$

Montrer, en utilisant (8.1.3), (8.2.4), et (8.2.6), que

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

3. Les relations (8.2.3) et (8.2.5) peuvent s'inverser. Montrer que

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (8.2.7)$$

4. Montrer que la loi de Hooke entraîne la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} \right].$$

Indication : la loi de Hooke est une égalité de deux matrices. Ecrire l'égalité des traces de ces deux matrices.

5. En déduire que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}. \quad (8.2.8)$$

8.3 Problème 3 : cisaillement simple

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, on étudie l'équilibre d'un corps élastique homogène isotrope de forme parallélépipédique, qui occupe la région Ω définie dans un repère orthonormé $0x_1x_2x_3$ par

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \quad 0 < x_3 < c\},$$

où a, b, c sont des longueurs données. (Dans la figure ci-dessous, il faut faire la correction suivante : l'axe vertical est x_3 , la coordonnée b sur cet axe doit être remplacée par c).

On suppose que le déplacement est donné par (un tel déplacement est dit "de cisaillement" dans le plan x_1, x_3)

$$u_1 = kx_3, \quad u_2 = u_3 = 0. \quad (8.3.1)$$

On se propose de calculer les densités de forces qui provoquent ce champ de déplacement.

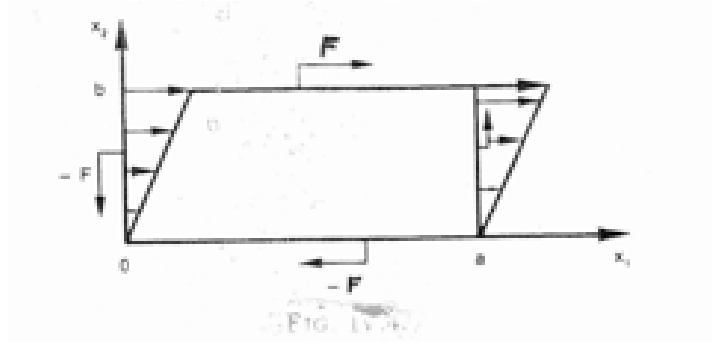


FIGURE 8.4 –

8.3.1 Loi de comportement

Quelle est la loi de comportement satisfaite par ce corps élastique ?

8.3.2 Equations d'équilibre

Ecrire les équations d'équilibre.

8.3.3 Tenseur des déformations linéarisé

Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\varepsilon(\mathbf{u})$ associé au déplacement $\mathbf{u}$ défini par (8.3.1).

8.3.4 Tenseur des contraintes

Calculer le tenseur des contraintes σ associé au tenseur des déformations linéarisé $\varepsilon(\mathbf{u})$.

8.3.5 Forces volumiques

A l'aide des équations d'équilibre et de l'expression de σ , calculer les forces volumiques $\rho \vec{f}$.

8.3.6 Forces surfaciques

Calculer les forces surfaciques $\vec{F} = \sigma \mathbf{n}$ sur chacune 6 faces du parallélépipède, d'équations respectives $x_1 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $x_2 = b$, $x_3 = 0$, $x_3 = c$.

Réponses :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{f} = 0, & \\ \vec{F} = (k\mu, 0, 0) & \text{sur la face } x_3 = c, \\ \vec{F} = (-k\mu, 0, 0) & \text{sur la face } x_3 = 0, \\ \vec{F} = (0, 0, k\mu) & \text{sur la face } x_1 = a, \\ \vec{F} = (0, 0, -k\mu) & \text{sur la face } x_1 = 0, \\ \vec{F} = \vec{0} & \text{sur les faces } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = b. \end{array} \right.$$

Chapitre 9

Equations de Navier, conditions de compatibilités, équations de Beltrami

9.1 Equations de Navier

On considère un matériau élastique linéaire homogène isotrope à l'équilibre, occupant un domaine Ω , et soumis à des forces extérieures volumiques $\rho \mathbf{f}$. Les coefficients de Lamé sont notés λ et μ . Le déplacement $\mathbf{u}$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \vec{f} & \text{dans } \Omega, \quad (\text{équations d'équilibre}) \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), & (\text{loi de comportement de Hooke}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}), & (\text{tenseur des déformations linéarisées}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_0 \subset \partial\Omega \quad (\text{conditions aux limites de Dirichlet}) \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \vec{F} & \text{sur } \Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \quad (\text{conditions aux limites de Neuman}). \end{array} \right. \quad (9.1.1)$$

Théorème 9.1.1. *Le problème (9.1.1) est équivalent au problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = 0 & \text{équations de Navier} \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ (\lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{n} = \vec{F} & \text{sur } \Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (9.1.2)$$

Les équations

$$(\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = 0. \quad (9.1.3)$$

sont appelées **les équations de Navier**. Equivalentes aux équations d'équilibre, elles les expriment en fonction du déplacement $\mathbf{u}$. Les équations de Navier sont équivalentes à

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} = 0. \quad (9.1.4)$$

Cette version des équations de Navier est intéressante lorsque $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$.

Démonstration. (Sous forme d'exercice)

1. On note $\mathbf{I}$ la matrice identité 3×3 . Montrer en utilisant le calcul indiciel que

$$\operatorname{div}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}). \quad (9.1.5)$$

2. Montrer par calcul indiciel que

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Delta} \mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})). \quad (9.1.6)$$

3. Déduire de (9.1.5), (9.1.6) et de la loi de Hooke, que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ vérifie

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) = (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}. \quad (9.1.7)$$

4. Déduire de (9.1.7) et des équations d'équilibre que le champ des déplacements $\mathbf{u}$ vérifie à l'équilibre les équations de Navier (9.1.3)

5. On rappelle que (cf. (1.7.6))

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u}.$$

Montrer que les équations de Navier sont équivalentes à

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} = 0.$$

□

9.2 Equations de compatibilités

Dans ce qui suit, pour faciliter la lecture de la démonstration, le tenseur des déformations linéarisées est noté $\mathbf{e}$ (au lieu de $\boldsymbol{\epsilon}$).

Pour résoudre (9.1.1), on peut chercher directement une solution $\boldsymbol{\sigma}$ de $-\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{f}$. Il faut ensuite déterminer s'il existe $\mathbf{u}$ tel que $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u})$. Compte tenu de l'équation $\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}$ (voir (8.2.8)), cela revient à déterminer les conditions sur $\mathbf{e}$ garantissant l'existence de $\mathbf{u}$ tel que $\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})$. Ces conditions s'appellent les équations de compatibilités. Elles sont analogues aux conditions sur $\mathbf{a}$ garantissant l'existence de f telle que $\nabla f = \mathbf{a}$ déterminées par le Théorème 1.7.10 (Lemme de Poincaré) qui établit l'équivalence

$$[\mathbf{a} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \mathbf{rot} \mathbf{a} = 0] \iff [\exists f \in C^2(\Omega), \mathbf{a} = \nabla f]. \quad (9.2.1)$$

Elles sont énoncées dans le théorème suivant, dont la preuve repose sur le lemme de Poincaré :

Théorème 9.2.1 (Equations de compatibilités). *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$. On a l'équivalence*

$$[\mathbf{e} \in C^2(\Omega, \mathbb{S}^3), \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jrs} e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3] \quad (9.2.2)$$

$$\iff$$

$$[\exists \mathbf{u} \in C^3(\Omega; \mathbb{R}^3), \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})].$$

Preuve

1. $\Leftarrow$: exercice.
2. $\Rightarrow$: supposons

$$\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (9.2.3)$$

Notre but est de trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (9.2.4)$$

pour tout (i, j) . Fixons $p \in \{1, 2, 3\}$, multiplions (9.2.4) par ε_{pjk} , dérivons par rapport à x_k et sommons par rapport à j et k . On obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pjk}e_{ij,k} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{pjk}u_{i,jk} + \varepsilon_{pjk}u_{j,ik}) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{pjk}u_{j,ik}) \\ &= \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{pjk}u_{j,k}) \right)_{,i}, \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Donc s'il existe $\mathbf{u}$ vérifiant (9.2.4), alors nécessairement

$$\nabla \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{pjk}u_{j,k}) \right) = \mathbf{a}^p, \quad (9.2.6)$$

où

$$\mathbf{a}^p = \varepsilon_{pjk}e_{ij,k}\mathbf{e}_i. \quad (9.2.7)$$

D'après (9.2.6), pour que $\mathbf{u}$ existe, il est nécessaire que $\mathbf{a}^p$ soit un gradient pour tout p . D'après le Lemme de Poincaré (voir (1.7.10)), pour que $\mathbf{a}^p$ soit un gradient, il est nécessaire et suffisant que $\text{rot } \mathbf{a}^p = 0$. Calculons

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a}^p &= (\text{rot } \mathbf{a}^p)_s \mathbf{e}_s \\ &= \varepsilon_{sqi}a_{i,q}^p \mathbf{e}_s && \text{d'après (9.2.7)} \\ &= \varepsilon_{sqi}\varepsilon_{pjk}e_{ij,kq} \mathbf{e}_s \\ &= -\varepsilon_{siq}\varepsilon_{pjk}e_{ij,qk} \mathbf{e}_s = 0 && \text{d'après (9.2.3)}. \end{aligned}$$

Le lemme de Poincaré nous dit alors que (voir (1.7.10))

$$\exists \omega_p \in C^2(\Omega), \quad \nabla \omega_p = \mathbf{a}^p. \quad (9.2.8)$$

L'équation (9.2.6) nous suggère, compte tenu de (9.2.8), de rechercher un champ $\mathbf{u}$ vérifiant

$$\omega_p = \frac{1}{2}\varepsilon_{pjk}u_{j,k} \quad \forall p \in \{1, 2, 3\}. \quad (9.2.9)$$

Si un tel champ $\mathbf{u}$ existe, alors pour tout (r, s) ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{prs}\omega_p &= \frac{1}{2}\varepsilon_{prs}\varepsilon_{pjk}u_{j,k} \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{rj}\delta_{sk} - \delta_{rk}\delta_{sj})u_{j,k} \\ &= \frac{1}{2}(u_{r,s} - u_{s,r}), \end{aligned}$$

donc si $\mathbf{u}$ existe,

$$u_{r,s} = \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}) + \frac{1}{2}(u_{r,s} - u_{s,r}) = e_{rs} + \varepsilon_{prs}\omega_p,$$

ce qui équivaut à

$$\nabla u_r = \mathbf{b}^r, \quad \text{où } \mathbf{b}^r = (e_{rs} + \varepsilon_{prs}\omega_p) \mathbf{e}_s. \quad (9.2.10)$$

Toujours d'après le Lemme de Poincaré (voir (1.7.10)), une fonction u_r vérifiant $\nabla u_r = \mathbf{b}^r$ existe si et seulement si $\mathbf{rot} \mathbf{b}^r = \mathbf{0}$. Or on a

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot} \mathbf{b}^r)_v &= \varepsilon_{vis} b_{s,i}^r \\
&= \varepsilon_{vis} (e_{rs} + \varepsilon_{prs} \omega_p)_{,i} && \text{d'après (9.2.10)} \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + \varepsilon_{vis} \varepsilon_{prs} \omega_{p,i} \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + \varepsilon_{vis} \varepsilon_{prs} a_i^p && \text{car } \nabla \omega_p = \mathbf{a}^p, \text{ voir (9.2.8)} \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + (\delta_{vp} \delta_{ir} - \delta_{vr} \delta_{ip}) a_i^p \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + a_r^v - \delta_{rv} a_i^i \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + \varepsilon_{vjk} e_{rj,k} - \delta_{rv} \varepsilon_{ijk} e_{ij,k} && \text{car } \mathbf{a}^p = \varepsilon_{pjk} e_{ij,k} \mathbf{e}_i \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + \varepsilon_{vjk} e_{rj,k} && \text{car } \varepsilon_{ijk} e_{ij,k} = 0 \text{ puisque } e_{ij} = e_{ji}, \\
&= \varepsilon_{vis} e_{rs,i} + \varepsilon_{vis} e_{ri,s} && \text{changement d'indice,} \\
&= \varepsilon_{vis} (e_{rs,i} + e_{ri,s}) \\
&= 0 && \text{car } M_{is}^r = e_{rs,i} + e_{ri,s} \text{ vérifie } M_{is}^r = M_{si}^r,
\end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{rot} \mathbf{b}^r = \mathbf{0}.$$

Donc, d'après le Lemme de Poincaré, pour tout $r \in \{1, 2, 3\}$, il existe u_r satisfaisant

$$\nabla u_r = \mathbf{b}^r. \quad (9.2.11)$$

La preuve de l'implication $\Rightarrow$ est terminée si nous montrons que $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) = \mathbf{e}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{r,s} + u_{s,r} &= b_s^r + b_r^s && \text{d'après (9.2.11)} \\
&= e_{rs} + \varepsilon_{prs} \omega_p + e_{sr} + \varepsilon_{psr} \omega_p && \text{d'après (9.2.10)} \\
&= e_{rs} + e_{sr} && \text{car } \varepsilon_{prs} + \varepsilon_{psr} = 0 \\
&= 2e_{rs} && \text{car } e_{rs} = e_{sr}
\end{aligned}$$

Le théorème 9.2.1 est démontré. $\square$

Remarque 9.2.1. La démonstration précédente présente une méthode systématique de construction d'un champ de déplacement $\mathbf{u}$ à partir d'un champ de déformation $\mathbf{e}$: partant de $\mathbf{a}^p$ défini par (9.2.7), on détermine ω^p vérifiant (9.2.8) et on définit $\mathbf{b}^r$ par (9.2.10). Le champ des déplacements est alors obtenu en résolvant (9.2.11).

9.2.1 Trois formulations équivalentes des équations de compatibilités

Voici trois variantes équivalentes des équations de compatibilités :

1. Les différents choix de (i, j) dans l'équation (9.2.3) conduisent à l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jrs} e_{pr,qs} &= 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \\
&\Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i, j) = (1, 1) : \quad & e_{22,33} + e_{33,22} = 2e_{23,32}, \\
(i, j) = (2, 2) : \quad & e_{11,33} + e_{33,11} = 2e_{13,31}, \\
(i, j) = (3, 3) : \quad & e_{22,11} + e_{11,22} = 2e_{21,12}, \\
(i, j) = (1, 2) : \quad & e_{12,33} + e_{33,12} = e_{13,23} + e_{23,13}, \\
(i, j) = (2, 3) : \quad & e_{23,11} + e_{11,23} = e_{21,31} + e_{31,21}, \\
(i, j) = (1, 3) : \quad & e_{13,22} + e_{22,13} = e_{12,32} + e_{32,12}.
\end{aligned} \quad (9.2.12)$$

2. On a

$$\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} = e_{il,jk} + e_{jk,il} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (9.2.13)$$

En effet, si $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$, d'après le théorème 9.2.1 il existe $\mathbf{u}$ tel que $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})$. En substituant $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})$ on vérifie que $e_{ij,kl} + e_{kl,ij} = e_{il,jk} + e_{jk,il}$. Inversement, si $e_{ij,kl} + e_{kl,ij} = e_{il,jk} + e_{jk,il}$, différents choix de (i, j, k, l) conduisent à (9.2.12) qui équivaut, comme on l'a vu, à $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$.

3. On a (en utilisant la convention de sommation des indices répétés) :

$$\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jrs}e_{pr,qs} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (9.2.14)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$e_{ij,kk} + e_{kk,ij} = e_{ik,jk} + e_{jk,ik} \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (9.2.15)$$

L'implication $\implies$ s'obtient en choisissant $k = l$ dans (9.2.13) et en sommant par rapport à k . L'implication $\impliedby$ s'obtient en testant les différents choix de (i, j) : on montre (9.2.15) $\implies$ (9.2.12) qui entraîne (9.2.14) d'après la variante 1. Plus précisément, en choisissant $(i, j) = (1, 2)$ dans (9.2.15), on obtient

$$e_{12,11} + e_{11,12} + e_{12,22} + e_{22,12} + e_{12,33} + e_{33,12} = e_{11,21} + e_{21,11} + e_{12,22} + e_{22,12} + e_{13,23} + e_{23,13},$$

qui se simplifie en

$$e_{12,33} + e_{33,12} = e_{13,23} + e_{23,13}.$$

Par permutation circulaire des indices, on obtient les trois dernière lignes de (9.2.12).

Ensuite, en choisissant $(i, j) = (1, 1)$ dans (9.2.15), on obtient

$$e_{11,11} + e_{11,11} + e_{11,22} + e_{22,11} + e_{11,33} + e_{33,11} = e_{11,11} + e_{11,11} + e_{12,12} + e_{12,12} + e_{13,13} + e_{13,13},$$

qui se simplifie en

$$e_{11,22} + e_{22,11} + e_{11,33} + e_{33,11} = e_{12,12} + e_{12,12} + e_{13,13} + e_{13,13}, \quad (9.2.16)$$

Par permutation circulaire on déduit, pour $(i, j) = (2, 2)$,

$$e_{22,33} + e_{33,22} + e_{22,11} + e_{11,22} = e_{23,23} + e_{23,23} + e_{21,21} + e_{21,21}, \quad (9.2.17)$$

et pour $(i, j) = (3, 3)$,

$$e_{33,11} + e_{11,33} + e_{33,22} + e_{22,33} = e_{31,31} + e_{31,31} + e_{32,32} + e_{32,32}. \quad (9.2.18)$$

(9.2.16) moins (9.2.17) donne

$$e_{11,33} + e_{33,11} - (e_{22,33} + e_{33,22}) = e_{13,13} + e_{13,13} - (e_{23,23} + e_{23,23}), \quad (9.2.19)$$

et (9.2.18) moins (9.2.19) fournit

$$2(e_{33,22} + e_{22,33}) = 2(e_{32,32} + e_{32,32}),$$

qui équivaut à la première ligne de (9.2.12). Les seconde et troisième lignes de (9.2.12) s'obtiennent ensuite par permutation circulaire. $\square$

9.3 Equations de Beltrami

Théorème 9.3.1. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$, soit $\boldsymbol{\sigma} \in C^2(\Omega; \mathbb{S}^3)$ tel que $-\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$ dans Ω , et soit $\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}$. On a l'équivalence

$$\left[\exists \mathbf{u} \in C^3(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}), \right]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{[(1+\nu)\Delta \sigma_{ij} + \sigma_{kk,ij} + (1+\nu) \left(f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{\nu}{1-\nu} f_{l,l} \delta_{ij} \right)] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3]}_{\text{équations de Beltrami}} \quad (9.3.1)$$

$\Longleftrightarrow$

$$(1+\nu)\Delta \boldsymbol{\sigma} + \nabla(\nabla(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})) + (1+\nu) \left(\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^t + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{div} \mathbf{f}) \mathbf{I} \right) = 0$$

Démonstration.

Preuve de l'implication $\Rightarrow$. D'après le théorème 9.2.1 et l'équivalence (9.2.15), l'existence de $\mathbf{u}$ tel que $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})$ équivaut aux équations de compatibilité $e_{ij,kk} + e_{kk,ij} - e_{ik,jk} - e_{jk,ik} = 0$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$). En reportant dans la loi de Hooke inversée $\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}$ (voir (8.2.8)) dans (9.2.15), on déduit que les équations de compatibilités sont équivalentes à

$$\begin{aligned} e_{ij,kk} + e_{kk,ij} - e_{ik,jk} - e_{jk,ik} &= \left(\frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \right)_{ij,kk} + \left(\frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \right)_{kk,ij} \\ &\quad - \left(\frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \right)_{ik,jk} - \left(\frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \right)_{jk,ik} = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,kk} \delta_{ij} \right) + \left(\frac{1+\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ij} - 3 \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ij} \right) \\ - \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,jk} \delta_{ik} \right) - \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ik} \delta_{jk} \right) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,kk} \delta_{ij} \right) + \left(\frac{1-2\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ij} \right) \\ - \left(\frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ik,k})_{,j} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ji} \right) - \left(\frac{1+\nu}{E} (\sigma_{jk,k})_{,i} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ij} \right) = 0. \end{aligned}$$

Les équations de compatibilités sont donc équivalentes à

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,kk} \delta_{ij} + \frac{1}{E} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ij} - \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ik,k})_{,j} - \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{jk,k})_{,i} = 0. \quad (9.3.2)$$

Or $\sigma_{ij,kk} = (\Delta \boldsymbol{\sigma})_{ij}$ et $(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,kk} = \Delta(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})$. De plus, $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie $-\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$, donc $(\sigma_{ik,k})_{,j} = -f_{i,j}$ et $(\sigma_{jk,k})_{,i} = -f_{j,i}$. En multipliant (9.3.2) par E , on déduit que

$$(9.3.2) \Longleftrightarrow (1+\nu)(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{ij} - \nu \Delta(\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \delta_{ij} + (\text{tr} \boldsymbol{\sigma})_{,ij} + (1+\nu)(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0.$$

C'est vrai pour tout i, j , donc

$$(1 + \nu)\Delta\sigma - \nu\Delta(\text{tr}\sigma)\mathbf{I} + \nabla\nabla(\text{tr}\sigma) + (1 + \nu)(\nabla\mathbf{f} + \nabla^t\mathbf{f}) = 0. \quad (9.3.3)$$

En prenant la trace de l'équation ci-dessus, notant que $\text{tr}\Delta\sigma = \Delta(\text{tr}\sigma)$, $\text{tr}(\nabla\nabla(\text{tr}\sigma)) = \Delta(\text{tr}\sigma)$, $\text{tr}\nabla\mathbf{f} = \text{tr}\nabla^t\mathbf{f} = \text{div}\mathbf{f}$, on obtient

$$(1 + \nu) \underbrace{\text{tr}\Delta\sigma}_{=\Delta(\text{tr}\sigma)} - 3\nu\Delta(\text{tr}\sigma) + \underbrace{\text{tr}\nabla\nabla(\text{tr}\sigma)}_{=\Delta(\text{tr}\sigma)} + (1 + \nu) \left(\underbrace{\text{tr}\nabla\mathbf{f}}_{=\text{div}\mathbf{f}} + \underbrace{\text{tr}\nabla^t\mathbf{f}}_{=\text{div}\mathbf{f}} \right) = 0.$$

soit

$$(1 + \nu - 3\nu + 1)\Delta(\text{tr}\sigma) + 2(1 + \nu)\text{div}\mathbf{f} = 0,$$

d'où

$$\Delta(\text{tr}\sigma) = -\frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)}\text{div}\mathbf{f}. \quad (9.3.4)$$

En reportant l'équation ci-dessus dans (9.3.3), on obtient

$$(1 + \nu)\Delta\sigma + \nabla\nabla(\text{tr}\sigma) + (1 + \nu)\left(\nabla\mathbf{f} + \nabla^t\mathbf{f} + \frac{\nu}{(1 - \nu)}(\text{div}\mathbf{f})\mathbf{I}\right) = 0. \quad (9.3.5)$$

L'implication $\implies$ de (9.3.1) est démontrée.

Preuve de l'implication $\impliedby$. Inversement, en prenant la trace de (9.3.5) on obtient (9.3.4) par

laquelle on exprime $\text{div}\mathbf{f}$ en fonction de σ . En reportant cette expression dans (9.3.5) on retrouve (9.3.3) qui d'après ce qui précède équivaut aux équations de compatibilité (9.2.2). $\square$

Remarque 9.3.1. Dans le cas de forces volumiques constantes, les équations de Beltrami s'écrivent

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{ij} + \sigma_{kk,ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

ce qui équivaut à

$$(1 + \nu)\Delta\sigma + \nabla(\nabla(\text{tr}\sigma)) = 0.$$

L'équation ci-dessus est satisfaite par tout champ σ constant ou affine par rapport aux variables d'espace x_i . C'est la raison pour laquelle, dans les exemples simples de problèmes d'élasticité développés en sections 8.1 et 8.2, nous avons obtenu des champs de déplacements associés aux champs de contraintes présumés solution.

9.4 Champ de déformations planes. Champ de contraintes planes

9.4.1 Champ de déformations planes

Si dans un corps élastique homogène isotrope de forme cylindrique de génératrices parallèles à Ox_3 , le champ des déplacements est de la forme

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0,$$

le champ des déformations est donné par

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}).$$

On dit qu'on a affaire à un champ de déformations planes, parallèlement au plan (x_1, x_2) . Les seules composantes non nulles du tenseur des déformations sont les composantes $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ où $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$. De plus, ces composantes ne dépendent que de x_1, x_2 , et non de x_3 .

Le tenseur des contraintes associées est de la forme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \lambda(\varepsilon_{\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})\end{aligned}\tag{9.4.1}$$

où les composantes $\sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, ne dépendent que de x_1 et x_2 et sont données par

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda(\varepsilon_{\gamma\gamma})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2\},\tag{9.4.2}$$

où nous convenons que les indices répétés grecs sont sommés de 1 à 2. Par ailleurs, comme $\varepsilon_{33} = 0$,

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Le champ des contraintes est donc, comme le champ des déformations, indépendant de x_3 . On ne pourra donc être dans un cas de déformations planes que si l'ensemble du problème posé est indépendant de x_3 , c'est à dire invariant par rapport à toute translation parallèle à Ox_3 .

Le problème à résoudre sera alors un problème bidimensionnel posé sur une section droite ω quelconque de Ω . Les équations du problème seront

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega, \text{ (nécessairement } f_3 = 0), \quad \alpha \in \{1, 2\},\tag{9.4.3}$$

les équations de comportement (9.4.1), et les conditions aux limites sur la frontière $\partial\omega$ de l'ouvert bidimensionnel. C'est ce qu'on appelle un problème d'élasticité bidimensionnelle (ou plane). La composante σ_{33} sera calculée à posteriori en utilisant la relation (9.4.1) (troisième ligne).

9.4.2 Champ de contraintes planes

C'est par définition un champ de contraintes σ_{ij} qui ne dépend que de x_1 et x_2 et dont les composantes σ_{i3} , $i = 1, 2, 3$ sont nulles. Si le corps élastique est isotrope, le champ des déformations associé ε_{ij} est relié au champ des contraintes par la loi de Hooke, soit

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \\ 0 &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23}, \\ 0 &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}.\end{aligned}\tag{9.4.4}$$

Il en résulte que ε_{33} s'exprime explicitement en fonction de ε_{11} et ε_{22} par

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\tag{9.4.5}$$

On peut écrire les équations (9.4.4) en fonction des seules composantes $\varepsilon_{\alpha\beta}$ par

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda^* \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\tag{9.4.6}$$

où

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Il en résulte que les $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ne dépendent que de x_1, x_2 et, d'après (9.4.5), il en est de même pour ε_{33} .

Il apparaît alors qu'un problème de contraintes planes conduit aux mêmes équations d'équilibre (9.4.3) et à la loi de comportement bidimensionnelle (9.4.6) qui est du même type que (9.4.1), λ étant remplacé par λ^* . D'un point de vue mathématique, les problèmes de contraintes planes et de déformation plane sont de même nature.

9.4.3 Fonction d'Airy

Théorème 9.4.1. *Soit un corps élastique isotrope dont la forme est un cylindre $\Omega = \omega \times (0, L)$, soumis à un champ de contraintes planes $\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2)$ de classe C^1 parallèlement au plan x_1, x_2 . On suppose que les forces volumiques sont nulles. Alors il existe une fonction $\chi \in C^3(\omega)$ telle que*

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \chi_{,22} & -\chi_{,12} & 0 \\ -\chi_{,12} & \chi_{,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.4.7)$$

La fonction χ est appelée la **fonction d'Airy**.

Avant de prouver le théorème, nous établissons une variante bidimensionnelle du théorème de Poincaré :

Lemme 9.4.1. *Soit ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. On a l'équivalence*

$$[\mathbf{h} \in C^1(\omega, \mathbb{R}^2), \quad h_{1,1} + h_{2,2} = 0] \iff [\exists f \in C^2(\omega), \quad h_2 = -f_{,1}, \quad h_1 = f_{,2}]. \quad (9.4.8)$$

Démonstration. Posons $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -h_2 \\ h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $\mathbf{rot} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{2,1} - a_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{1,1} + h_{2,2} \end{pmatrix} = \vec{0}$ donc, d'après le théorème 1.7.10 (de Poincaré), il existe f tel que

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_2 \\ h_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On déduit

$$h_2 = -f_{,1}, \quad h_1 = f_{,2}, \quad f = f(x_1, x_2).$$

Et réciproquement. □

Preuve du Théorème 9.4.1. Un champ de contraintes planes $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{\alpha\beta}\}$ dans un matériaux où les forces volumiques sont nulles, doit satisfaire les deux équations d'équilibre suivantes dans ω :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0. \end{cases} \quad (9.4.9)$$

D'après 1.7.16 appliqué à l'équation $\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0$, il existe une fonction $\varphi_1(x_1, x_2) \in C^1(\omega)$ telle que

$$\sigma_{12} = -(\varphi_1)_{,1}, \quad \sigma_{11} = (\varphi_1)_{,2}. \quad (9.4.10)$$

Comme $\boldsymbol{\sigma} \in C^3(\omega; \mathbb{S}^3)$, on a $\varphi_1 \in C^2(\omega)$. De même, d'après 1.7.16 appliqué à l'équation $\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0$, il existe une fonction $\varphi_2(x_1, x_2) \in C^2(\omega)$ telle que

$$\sigma_{22} = -(\varphi_2)_{,1}, \quad \sigma_{21} = (\varphi_2)_{,2}. \quad (9.4.11)$$

La matrice $\boldsymbol{\sigma}$ étant symétrique, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ donc $-(\varphi_1)_{,1} = (\varphi_2)_{,2}$. On déduit

$$\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} = 0.$$

D'après le lemme 1.7.17 appliqué à l'équation $\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} = 0$, il existe une fonction $\chi(x_1, x_2) \in C^1(\omega)$ telle que

$$\varphi_2 = -\chi_{,1}, \quad \varphi_1 = \chi_{,2}. \quad (9.4.12)$$

Comme $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\omega)$, on a $\chi \in C^3(\omega)$. Il résulte de (9.4.10), (9.4.11), (9.4.12) que

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= -(\varphi_1)_{,1} = -\chi_{,12}, & \sigma_{11} &= (\varphi_1)_{,2} = \chi_{,22}, \\ \sigma_{22} &= -(\varphi_2)_{,1} = \chi_{,11}, & \sigma_{21} &= (\varphi_2)_{,2} = -\chi_{,12}, \end{aligned}$$

qui équivaut à (9.4.7).

Chapitre 10

Références

1. R. Abeyaratne : Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids, Massachusetts Institute of Technology. https://web.mit.edu/abeyaratne/lecture_notes.html
2. H. Brézis : Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris (1993).
3. P. G. Ciarlet : Mathematical elasticity. Volume I : three-dimensional elasticity. North-Holland (1988).
4. G. Duvaut : Mécanique des milieux continus, Dunod, Paris (1998).
5. S. Forest, M. Amestoy : Mécanique des milieux continus, Cours Polycopié, Ecole des Mines de Paris, 2018.
6. J. Garrigues : Cours de mécanique des milieux continus ; <http://jean.garrigues.perso.centrale-med.fr>
7. https://fr.wikipedia.org/wiki/Champ_solnodal