Année 2017-2018
L2 — SV Concours
HLMA411 Mathématiques

ÉPREUVE ÉCRITE (13 NOVEMBRE 2017)
(DURÉE : 1H30)

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. **Questions de cours**. Pour (1)-(2)-(3), on se donne un espace vectoriel E, un sous-ensemble $F \subset E$, des vecteurs $v_1, \dots, v_k \in E$.

(1) Rappeler la définition de « F est un sous-espace vectoriel de E ».

(2) Rappeler la définition de « la famille $(v_1, \dots, v_k)$ est libre ».

(3) Rappeler la définition de « la famille $(v_1, \dots, v_k)$ engendre E ».

(4) Soient G et H deux sous-espaces vectoriels de E tels que $G \subset H$. Quelle relation y a-t-il entre $\dim(G)$ et $\dim(H)$? Si on suppose $\dim(G) = \dim(H)$, que peut-on dire de plus ?

(5) Donner l'énoncé du théorème de la base incomplète.

Exercice 2. On pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0\,,\ x + 2z - t = 0\}$$
$$G = \mathrm{Vect}((1, 1, 2, 3), (1, -1, 1, 0), (2, -4, 1, -3))$$

(1) Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?

(2) Déterminer une base de G. Quelle est la dimension de G ?

(3) Écrire G comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

(4) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

(5) Montrer que $(-1, 1, 1, 1) \in F$ et $(2, 0, 3, 3) \in G$, puis déterminer tous les vecteurs $v \in F$ et $w \in G$ tels que $v + w = (1, 1, 4, 4)$.

(6) Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la base de F obtenue à la question 1. *Remarque : il y a plusieurs manières de traiter cette question.*

Exercice 3. On considère les vecteurs $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \in \mathbb{R}^4$ définis par :

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3, 2) \quad u_3 = (2, 5, 6, 4) \quad u_4 = (2, 6, 8, 5) \quad u_5 = (1, -1, -3, -1)$$

(1) Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

(2) Quel est le rang de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$?

(3) Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

Exercice 4. Dans un espace vectoriel E, on considère trois vecteurs u, v, w. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de E si et seulement si la famille $(v + w, u + w, u + v)$ est également une base de E.

Solution succinte

1 (1) F est un sous-espace vectoriel de E s'il vérifie les conditions suivantes :

(a) $0_E \in F$;

(b) $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$;

(c) $\forall u \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u \in F$.

(2) La famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre si la seule combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_k$ qui est égale au vecteur nul est celle dans laquelle tous les coefficients sont nuls. Cette condition s'écrit aussi :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R},\ (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

(3) La famille $(v_1, \ldots, v_k)$ engendre E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_k$. Cette condition s'écrit aussi :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

(4) Si G et H sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $G \subset H$ alors $\dim(G) \leq \dim(H)$; et si $\dim(G) = \dim(H)$, alors $G = H$.

(5) Le théorème de la base incomplète dit que si $\mathscr{F}$ est une famille libre de vecteurs de E qui n'engendre pas E, alors on peut la compléter en une base de E en lui ajoutant des vecteurs (que l'on peut choisir parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée).

2 (1) On résout le système linéaire homogène de deux équations qui définit F. On obtient par exemple :

$$F = \{(-4z + 2t, 3z - t, 2z, 2t) \mid z, t \in \mathbb{R}\},$$

et par conséquent $F = \mathrm{Vect}((-4, 3, 2, 0), (2, -1, 0, 2))$. Or les deux vecteurs $(-4, 3, 2, 0)$ et $(2, -1, 0, 2)$ ne sont pas colinéaires, donc la famille $((-4, 3, 2, 0), (2, -1, 0, 2))$ est libre, donc c'est une base de F. Ainsi F est de dimension 2.

(2) Notons u, v, w les vecteurs qui engendrent G (dans l'ordre de l'énoncé). Par définition, la famille (u, v, w) engendre G, et la question est de savoir si elle est libre ou non. Pour cela, on détermine les nombres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Cette équation équivaut à un système linéaire homogène en α, β, γ ; on résout ce système, et on trouve $\alpha = \gamma$ et $\beta = -3\gamma$ avec γ variable libre. Ainsi ce système possède des solutions non nulles, par exemple la solution pour laquelle $\gamma = 1$, soit $\alpha = 1$ et $\beta = -3$, ce qui nous donne la relation

$$u - 3v + w = 0,$$

ou encore $w = -u + 3v$. La famille (u, v, w) n'est donc pas libre, et $G = \mathrm{Vect}(u, v)$. Or (u, v) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc elle est libre, donc c'est une base de G, et ainsi $\dim(G) = 2$.

(3) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a vu dans la question précédente que G est engendré par u et v ; donc $(a, b, c, d) \in G$ si et seulement si il existe α, β, γ tels que

$$\alpha u + \beta v = (a, b, c, d).$$

Cette dernière équation est équivalente à un système de 4 équations en α, β, et on cherche une ou des conditions sur a, b, c, d pour que ce système soit compatible. On applique la méthode du pivot, et on obtient par exemple le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta = 2a - c \\ +0 = 3a + b - 2c \\ +0 = 3a - 3c + d \end{cases}$$

On en déduit que le système initial est compatible si et seulement si les deux équations $0 = 3a + b - 2c$ et $0 = 3a - 3c + d$ sont vérifiées. Par conséquent :

$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 3a + b - 2c = 0, 3a - 3c + d = 0\}.$$

(4) On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Pour montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$, il suffit donc de prouver que $F \cap G = 0$.

On peut prouver que $F \cap G = \{0\}$ de deux manières différentes :

— Soit en résolvant le système homogène de 4 équations à 4 inconnues obtenu en réunissant les deux équations définissant F avec les deux équations de G obtenues à la question précédente, et en montrant ce système a la solution nulle comme unique solution.

— Soit en prenant un vecteur de G, donc un vecteur de la forme $\alpha u + \beta v$, et en montrant que s'il vérifie les équations de F alors nécessairement $\alpha = \beta = 0$ et donc ce vecteur est nul.

Détaillons la deuxième manière : un vecteur de G est de la forme $\alpha u + \beta v$, donc de la forme $(\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Un tel vecteur appartient à F si et seulement s'il vérifie les équations qui définissent F, donc si et seulement si :

$$(\alpha + \beta) + 2(\alpha - \beta) - (2\alpha + \beta) = 0 \quad \text{et} \quad (\alpha + \beta) + 2(2\alpha + \beta) - 3\alpha = 0.$$

On simplifie et on résout ce système de deux équations ; on trouve que $\alpha = \beta = 0$ en est la seule solution. Donc le vecteur nul est bien le seul vecteur qui appartient à la fois à G et à F.

(5) On observe que $(-1, 1, 1, 1)$ vérifie les équations qui définissent F, et que $(2, 0, 3, 3) = u + v$ (notations de la question 2), donc il appartient à G (autre méthode : observer qu'il vérifie les équations de G obtenues à la question 3). Ensuite, on constate que $(1, 1, 4, 4)$ est la somme de ces deux vecteurs. Or, dire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ revient à dire que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Il existe donc un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $v + w = (1, 1, 4, 4)$, ce sont les vecteurs donnés dans la question.

(6) La juxtaposition (concaténation) d'une base de F et d'une base de G donne une base de $\mathbb{R}^4$: c'est une propriété fondamentale du fait que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. Donc

$$((-4, 3, 2, 0), (2, -1, 0, 2), (1, 1, 2, 3), (1, -1, 1, 0)$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

3 (1) Non, tout simplement parce qu'il y a 5 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4.

(2) On cherche les nombres réels $x, y, z, t, u \in \mathbb{R}$ tels que

$$x(1, 1, 1, 1) + y(1, 2, 3, 2) + z(2, 5, 6, 4) + t(2, 6, 8, 5) + u(1, -1, -3, -1) = (0, 0, 0, 0).$$

Cette dernière égalité équivaut à un système linéaire homogène de 4 équations à 5 variables, que l'on résout par la méthode du pivot. On arrive par exemple au système échelonné suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2t + u = 0 \\ \quad y + 3z + 4t - 2u = 0 \\ \qquad z + t = 0 \end{cases}$$

Dans ce système échelonné, les variables libres sont t et u, les variables principales sont x, y et z. On en déduit de nouveau que la famille n'est pas libre, mais avec une précision plus grande car ce calcul nous montre que u_4 et u_5 sont combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3, et en même temps que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre :

— La solution correspondant au choix $t = 1$ et $u = 0$ est $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$, $t = 1$, $u = 0$. Donc $u_1 - u_2 - u_3 + u_4$, ce qui montre que u_4 est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

— La solution correspondant au choix $t = 0$ et $u = 1$ est $x = -3$, $y = 2$, $z = 0$, $t = 0$, $u = 1$. Donc $-3u_1 + 2u_2 + u_5 = 0$, ce qui montre que u_5 est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

— Si on prend $t = u = 0$ dans la combinaison linéaire, on obtient un système homogène en x, y, t qui est devenu triangulaire, donc qui n'a que $x = y = z = 0$ comme solution, ce qui montre que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

(3) On a donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_{3,4}, u_5) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, avec une famille (u_1, u_2, u_3) qui est libre, et donc qui est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_{3,4}, u_5)$. Donc la dimension de ce sous-espace vectoriel est égale à 3, autrement dit le rang de la famille est égal à 3.

(4) (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, comme on l'a vu à la question précédente.

4 Par double implication, en revenant à la définition d'une base : on montre qu'une des deux familles est libre (respectivement génératrice) si et seulement si l'autre est libre (respectivement génératrice). En fait on peut oublier le côté « génératrice » pour des raisons de dimension : si une des deux familles est une base de E, c'est que E est de dimension 3, et par conséquent si l'autre famille est libre elle est automatiquement une base puisqu'elle possède 3 vecteurs...

Par exemple, supposons (u, v, w) libre et montrons que $(v + w, u + w, u + v)$ est libre. Pour cela, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(v + w) + \beta(u + w) + \gamma(u + v) = 0_E$. En réorganisant les termes, on obtient $(\beta + \gamma)u + (\alpha + \gamma)v + (\alpha + \beta)w = 0_E$. Donc $\beta + \gamma = \alpha + \gamma = \alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$ puisque la famille (u, v, w) est libre. On résout ce petit système de trois équations et on montre que $\alpha = \beta = \gamma = 0_{\mathbb{R}}$ est sa seule solution. Donc $(v + w, u + w, u + v)$ est bien libre.