Université de Montpellier

Faculté des Sciences

HA8201H - Maths PEIP S2

Contrôle Continu n°1 du 18/02/2026

Correction

Exercice 1 (Cours)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit f une application de E vers F.

a) Donner la définition de $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

Supposons f linéaire. On note 0_E et 0_F les vecteur nuls de E et F, respectivement.

b) Rappeler la définition du noyau $\ker(f)$.

c) Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction. a) L'application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si

— $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

— $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

b) Le noyau $\ker(f)$ est l'ensemble des antécédents de 0_F par f, c'est-à-dire le sous-ensemble de E défini par

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

c) — Comme f est linéaire, on sait que $f(0_E) = 0_F$ et donc $0_E \in \ker(f)$.

— Soient $x, y \in \ker(f)$. Par linéarité de f, on sait que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. De plus, comme $x, y \in \ker(f)$, on a que $f(x) = f(y) = 0_F$. Il suit que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_F + 0_F = 0_F$$

et donc $x + y \in \ker(f)$.

— Soient $x \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de f, on sait que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. De plus, comme $x \in \ker(f)$, on a que $f(x) = 0_F$. Il suit que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda.0_F = 0_F$$

et donc $\lambda x \in \ker(f)$.

On a ainsi montré que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'espace E est engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$, c'est-à-dire

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

L'espace F est défini par

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + 3z & = & 0 \\ x - 3z & = & 0 \end{array} \right. \right\}.$$

a) Montrer qu'il existe un vecteur $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $F = \mathrm{Vect}(u_3)$.

b) En déduire une base et la dimension de F.

c) Donner une base et la dimension de E.

d) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

e) Montrer que E et F sont supplémentaires, c'est-à-dire que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Correction. a) Les vecteurs (x, y, z) de F sont les solutions du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + 3z & = & 0 \\ x - 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} -L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array}$$

On obtient le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 3z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$F = \{(3z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(3, 0, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u_3),$$

où $u_3 = (3, 0, 1)$.

b) Comme $F = \mathrm{Vect}(u_3)$, on sait que la famille (u_3), constituée uniquement du vecteur u_3, est génératrice de F. De plus, la famille (u_3) est clairement libre car constituée uniquement d'un vecteur. Il suit que la famille (u_3) est une base de F et $\dim F = 1$.

c) Comme $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, on sait que la famille (u_1, u_2) est génératrice de E. Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, $u_2 \neq \lambda u_1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient que la famille (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base de E et $\dim E = 2$.

d) La famille (u_1, u_2, u_3) étant constituée de trois vecteurs, on sait que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elle est libre ou génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors (α, β, γ) est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

Il y a trois variables principales et aucune variable libre. Le système admet donc une unique solution $(0, 0, 0)$. On en conclut que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

e) Montrons tout d'abord que la somme de E et F est directe, c'est-à-dire que

$$E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Soit $v \in E \cap F$. Comme $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2.$$

De plus, comme $F = \mathrm{Vect}(u_3)$, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = \gamma u_3.$$

On obtient

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = v = \gamma u_3$$

et donc

$$\alpha u_1 + \beta u_2 - \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Enfin, comme (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, elle est libre. On obtient que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Il suit que $v = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Par les questions précédentes, on sait que $\dim E = 2$, $\dim F = 1$ et $\dim E \cap F = \dim \{0_{\mathbb{R}^3}\} = 0$. Le théorème des quatre dimensions implique que

$$\dim E \oplus F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F = 2 + 1 - 0 = 3.$$

On en conclut que $E \oplus F$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$ et donc

$$E \oplus F = \mathbb{R}^3.$$

Les sous-espaces vectoriels E et F sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs suivants

$$u = (1, -3, 2), \quad v = (4, 3, -1) \quad \text{et} \quad w = (2, -1, 1).$$

a) Montrer que la famille (u, v, w) est liée.
b) Expliquer pourquoi la famille (u, v, w) ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$.
c) Donner une représentation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$.
d) Donner une base et la dimension de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$.

Correction. a) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors (α, β, γ) est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma &= 0 \\ -3\alpha + 3\beta - \gamma &= 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ 5L_3 + 3L_1 \end{array}$$

Il y a deux variables principales et une variable libre. Le système admet donc une infinité de solutions. On en conclut que la famille (u, v, w) est liée.

b) Si la famille (u, v, w) était génératrice, ce serait une famille génératrice trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors, (u, v, w) serait une base de $\mathbb{R}^3$ et serait donc libre, en contradiction avec la question précédente. On en conclut que la famille (u, v, w) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

c) On sait que le vecteur (x, y, z) est dans $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (x, y, z).$$

Il suit que le vecteur (x, y, z) est dans $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ si et seulement si le système linéaire suivant est compatible

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma & = & x \\ -3\alpha + 3\beta - \gamma & = & y \\ 2\alpha - \beta + \gamma & = & z \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & -1 & y \\ 2 & -1 & 1 & z \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour échelonner la matrice.

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & x \\ 0 & 15 & 5 & y + 3x \\ 0 & -9 & -3 & z - 2x \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & x \\ 0 & 15 & 5 & y + 3x \\ 0 & 0 & 0 & -x + 3y + 5z \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ 5L_3 + 3L_1 \end{array} \end{array}$$

Le système est compatible si et seulement si $-x + 3y + 5z = 0$. On obtient la représentation cartésienne

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x + 3y + 5z = 0\right\}.$$

d) Par la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(u, v, w) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y + 5z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y + 5z\} \\ &= \{(3y + 5z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(3, 1, 0) + z(5, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((3, 1, 0), (5, 0, 1)). \end{aligned}$$

On obtient que la famille $((3, 1, 0), (5, 0, 1))$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$. De plus, cette famille est libre car $(3, 1, 0) \neq \lambda(5, 0, 1)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On conclut que la famille $((3, 1, 0), (5, 0, 1))$ est une base de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $\dim \mathrm{Vect}(u, v, w) = 2$.