

Résumé-semainier du cours

Module HAX201X

Les polycopiés du cours, disponibles sur Moodle, sont notés ci-dessous :

- [C1] = *Analyse 2*, par Jérémie Brioussel, 2022
- [C2] = *Développements Limités*, par Paul-Emile Paradan, 2022–2023
- [C3] = *Introduction aux séries numériques*, par Paul-Emile Paradan, 2022–2023

Les **démonstrations** à connaître, qui sont toutes faites en séance de CM, sont indiquées par “(*)”. Tous les énoncés de résultats, toutes les définitions, et tous les exemples sont à connaître.

SEMAINE 1

I. Rappels du premier semestre [C1, §1.1-1.4]

– Vocabulaire

- (1) suites majorées, minorées, bornées, périodiques, croissantes et décroissantes
- (2) utilisation de la terminologie “ à partir d’un certain rang ”

– Limites de suites

- (1) suites convergentes et divergentes
- (2) (*) **Lemme** : *Les suites convergentes sont bornées.*
Réciproque fausse (exemples : $u_n = (-1)^n, \dots$)
- (3) suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$
- (4) règle des croissances comparées :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Avec le changement de variable $x := -\ln(y)$, $y > 0$, cela donne $\lim_{y \rightarrow 0^+} y^\alpha |\ln(y)|^\beta = 0$ si $\alpha > 0$, et $+\infty$ si $\alpha < 0$.

$\implies$ Exemples de limites classiques :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{(q')^{n^2}} = 0 \quad \forall \alpha > 0, \forall q, q' > 1.$$

- (5) Etude de quelques cas indéterminés ; exemples :

$$u_n = ne^{2n} - n^3e^n - n^7, \quad v_n = \frac{n^3 - \cos(n) + 2n}{n^2 \ln(n) + n}.$$

– limites et fonctions

- (1) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$.
- (2) Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = L$.
- (3) (*) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et (u_n) une suite de I convergente vers $L \in I$. Alors $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.
- (4) Exemples : $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, $v_n = n \sin(1/n)$.

– suites monotones

- (1) (*)
- Théorème**
- de convergence des suites monotones :

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée), alors elle converge. Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et n'est pas majorée (resp. minorée), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Lorsque (u_n) est croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), sa limite est le nombre réel $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).

- (2) Exemples plus difficiles : la suite de terme général
- $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$
- diverge, et celle de terme général
- $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$
- converge. (Méthode par encadrement intégral.)

– suites adjacentes

- (1) (*) **Théorème** : Si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
- (2) Exemple : $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$: (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes (cf. poly [C1] pour les détails).

SEMAINE 2

– Relations de comparaison o , O et $\sim$

- (1) Définitions
- (2) Exemples : $q^n = o(1)$ si $|q| < 1$, $\sqrt{n^2 + 1} + n \cos(n) = O(n)$, $n^\alpha = o(q^n)$ pour tous $\alpha > 0, q > 1$, $(q')^n = o(q^n)$ pour tous $q > q' > 0$.
- (3) Exemples : $\frac{2 \sin(n^2)}{n} = O(\frac{1}{n})$, $\frac{n^2 + \cos(n)}{n \ln(n) + 1} \sim \frac{n}{\ln(n)}$, $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, $\sum_{k=1}^n 1/k \sim \ln(n)$ (via l'encadrement intégral de $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ vu en semaine 1)

II. Suites récurrentes $u_{n+1} = F(u_n)$ [C1, §1.6]

- (1) Définition, représentation graphique
- (2) (*) **Proposition** : Soit $F : I \rightarrow I$, et $u_0 \in I$. On a :
- si F est une fonction croissante alors (u_n) est monotone : si $u_1 \leq u_0$, elle est décroissante, et si $u_1 \geq u_0$, elle est croissante ;
 - si $F(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, alors (u_n) est croissante ; si $F(x) \leq x$ pour tout $x \in I$, alors (u_n) est décroissante ;
 - si (u_n) converge et F est continue, alors la limite L de (u_n) est un point fixe de F , c'est-à-dire qu'il vérifie $F(L) = L$.
- (3) Méthode générale pour étudier une suite récurrente (u_n) .
Deux exemples détaillés : étude des suites récurrentes définies par $F(x) = \sqrt{x+1}$, et $F(x) = -x^2 + 2x$.
Voir dans [C1, pp 22-24] le cas de $F(x) = \cos(x)$.
- (4) Définition d'une application contractante sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Rappel de l'inégalité des accroissements finis.
- (5) Énoncé du **théorème du point fixe** (preuve en semaine 5, et dans [C1, §1.9]) :

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $F : I \rightarrow I$ une application contractante. Alors F possède un unique point fixe L . De plus, la suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $u_0 \in I$, converge vers L .

(On dit qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est fermé si $I = \mathbb{R}$ ou I est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, ou $] -\infty, a]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).

- (6) Applications/exemples :

- approximation de $\sqrt{2}$ par la suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $F(x) = x/2 + 1/x$ est contractante sur $I = [1, \infty[$.
- approximation de la racine α du polynôme $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ dans l'intervalle $[1, 2]$. On utilise la suite $u_{n+1} = F(u_n)$ avec $F(x) = 20/(x^2 + 2x + 10)$.

SEMAINES 3 et 4

III. Valeurs d'adhérences [C1, §1.7-1.8]

– Définition d'une valeur d'adhérence. On note $AD((u_n))$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) .

- (1) Propriétés : Si $\lim u_n = l$, alors $AD((u_n)) = \{l\}$; si $\lim u_n = \pm\infty$, alors $AD((u_n)) = \emptyset$.
- (2) Exemples : $AD((-1)^n) = \{\pm 1\}$; exemple de suite (u_n) non convergente et telle que $AD((u_n))$ est un singleton; exemple de $AD((\cos(\frac{2\pi}{3}n + \frac{1}{n})))$, de cardinal 3; exemple de suite (u_n) tel que $AD((u_n))$ est un intervalle : la suite qui à $n = 10^k a_k + \dots + 10a_1 + a_0$ associe le nombre décimal $u_n = 0, a_0 a_1 \dots a_k \in [0, 1[$. Mention de $AD((\sin(n))) = [-1, 1]$, preuve au niveau L2 Maths.
- (3) (*) **Théorème de Bolzano-Weierstrass** : *Toute suite bornée a une valeur d'adhérence.* Preuve par dichotomie.

– Suite extraite, sous-suite : Définition, puis propriétés :

- (1) Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim u_{\varphi(n)} = l$ pour toute extraction φ .
- (2) Si $AD((u_n)) \neq \emptyset$, alors $l \in AD((u_n))$ si, et seulement si, il existe une extraction φ telle que $\lim u_{\varphi(n)} = l$.

– Exemples de suites extraites.

– limites supérieures et inférieures : définitions, puis :

Théorème : *Si (u_n) est une suite bornée, alors $\limsup(u_n)$ et $\liminf(u_n)$ sont la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence, respectivement, de (u_n) .*

Corollaire : deuxième preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (via $\limsup(u_n) \in AD((u_n))$!).

– Quelques faits :

- (1) $\limsup(u_n)$ et $\liminf(u_n)$ sont finis tous les deux si et seulement si (u_n) est bornée.
- (2) Si (u_n) n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.
- (3) Si $u_n \leq \alpha$ à partir d'un certain rang, alors $\limsup(u_n) \leq \alpha$.
- (4) Si $\limsup(u_n) < \alpha$, alors $u_n < \alpha$ à partir d'un certain rang
- (5) $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$ et $\liminf(u_n + v_n) \geq \liminf(u_n) + \liminf(v_n)$

Théorème (caractérisation des suites bornées convergentes) : *Soit (u_n) une suite bornée. Les faits suivants sont équivalents :*

- (u_n) est convergente,
- $\limsup(u_n) = \liminf(u_n)$,
- (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

SEMAINE 5

IV. Suites de Cauchy, et applications de Bolzano-Weierstrass [C1, §1.9]

Définition d'une suite de Cauchy, puis :

- (1) (*) **Lemme** : *Toute suite de Cauchy est bornée.*
- (2) (*) **Théorème** : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

– Application 1 : preuve du théorème du point fixe.

– Application 2 : introduction aux séries numériques. Soit (a_k) une suite réelle, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

On s'intéresse au comportement de la suite (u_n) , qu'on appelle "série numérique".

(*) **Lemme** : Posons $U_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$. Si la suite (U_n) est majorée, alors la suite (u_n) converge.

(*) **Lemme** : On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que pour tout $k \geq K$ on a $a_k \neq 0$ et $|a_k/a_{k+1}| \leq \rho$. Alors la suite (u_n) converge.

Exemples d'utilisation des deux lemmes ci-dessus : (a) la suite (u_n) , où $u_n := \sum_{k=1}^n \frac{\sin(n)}{n^2}$, est convergente ; (b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(v_n(x))$, où $v_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^n}{n!}$, est convergente.

– Application 3 : Fonctions continues sur un segment :

- (1) (*) **Théorème des bornes atteintes** : Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes. Preuve via Bolzano-Weierstrass.
- (2) Notion de fonction uniformément continue.

Théorème de Heine : Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.