Université de Montpellier

Faculté des Sciences

HA8201H - Maths PEIP S2

Devoir Encadré n°1 du 13/02/2026

Correction

Exercice 1. Soit E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe un réel strictement positif $A \in \mathbb{R}_+^*$ et deux applications $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant A \implies f(x) = g(x) - h(x).$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

Correction. On considère $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la somme d'applications et de la multiplication d'une application par un réel. On sait que $E \subset \mathcal{F}$ et l'on montre que E est un sous-espace vectoriel (SEV) de $\mathcal{F}$.

— On considère l'application nulle

$$\begin{array}{rccc} 0_{\mathcal{F}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Alors pour $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $g = h$ une application croissante sur $\mathbb{R}$, il est évident que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant A$, on a

$$0_{\mathbf{F}}(x) = 0 = g(x) - f(x).$$

Donc $0_{\mathcal{F}} \in E$.

— Soient $f_1, f_2 \in E$. On montre que $f_1 + f_2 \in E$.
Par définition, il existe $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $g_1, g_2, h_1, h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|x| \geqslant A_1 \implies f_1(x) = g_1(x) - h_1(x)$$

et

$$|x| \geqslant A_2 \implies f_2(x) = g_2(x) - h_2(x).$$

Posons $A = \max\{A_1, A_2\}$, $g = g_1 + g_2$ et $h = h_1 + h_2$. Alors $A \in \mathbb{R}_+^*$ et les applications g et h sont croissantes. Effet, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant x'$, on a $g_1(x) \leqslant g_1(x')$ et $g_2(x) \leqslant g_2(x')$ car g_1 et g_2 sont croissantes et donc

$$g(x) = (g_1 + g_2)(x) = g_1(x) + g_2(x) \leqslant g_1(x') + g_2(x') = (g_1 + g_2)(x') = g(x').$$

La croissance de $h = h_1 + h_2$ se justifie de la même manière.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant A$. Comme $|x| \geqslant A \geqslant A_1$, on sait que

$$f_1(x) = g_1(x) - h_1(x).$$

De plus, comme $|x| \geqslant A \geqslant A_2$, on sait aussi que

$$f_2(x) = g_2(x) - h_2(x).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = (g_1(x) - h_1(x)) + (g_2(x) - h_2(x)) \\ &= (g_1(x) + g_2(x)) - (h_1(x) + h_2(x)) = g(x) - h(x)\end{aligned}$$

et donc $f_1 + f_2 \in E$.

— Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On montre que $\lambda f \in E$.
Si $\lambda = 0$, on sait déjà que $\lambda f = 0_{\mathcal{F}} \in E$. Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Comme $f \in E$, on sait qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|x| \geqslant A \implies f(x) = g(x) - h(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant A$. Il est clair que

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= \lambda f(x) = \lambda\,(g(x) - h(x)) = \lambda g(x) - \lambda h(x) \\ &= (\lambda g)(x) - (\lambda h)(x) = (-\lambda h)(x) - (-\lambda g)(x).\end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$, on utilise les fonctions λg et λh qui sont croissantes. Si $\lambda < 0$, on utilise les fonctions $-\lambda g$ et $-\lambda h$ qui sont croissantes. Dans les deux cas, on obtient que $\lambda f \in E$.

On a ainsi montré que E est un SEV de $\mathcal{F}$. On conclut que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les trois sous-espaces vectoriels suivants

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + t = 0\right\}, \quad F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + 2z - t = 0\right\}$$

et

$$G = \operatorname{Vect}(u_1, u_2), \text{ où } u_1 = (1, 0, 1, 1) \text{ et } u_2 = (3, -1, 1, 0).$$

a) On note $H = E \cap F$. Déterminer une famille de deux vecteurs (v_1, v_2) qui engendre le sous-espace vectoriel H.

b) Montrer que
$$G + H = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2).$$

c) En déduire une représentation cartésienne de $G + H$.

d) La somme $G + H$ est-elle directe ?

Correction. a) $(x, y, z, t) \in E \cap F$ si et seulement si (x, y, z, t) est solution du système linéaire

$$\begin{cases} x - y + t &= 0, \\ x + y + 2z - t &= 0. \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss. On échelonne la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array}$$

et on la réduit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 + L_2/2 \\ L_2/2 \end{array}$$

Le système est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0, \\ y+z-t & = & 0. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z, \\ y & = & -z+t. \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$H = \{(-z, -z+t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \{z(-1,-1,1,0) + t(0,1,0,1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

et

$$H = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)\,, \text{ où } v_1 = (-1,-1,1,0) \text{ et } v_2 = (0,1,0,1).$$

b) On montre par double inclusion que $G + H = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, v_1, v_2)$.
Soit $w \in G + H$. Alors, il existe $w_G \in G$ et $w_H \in H$ tels que $w = w_G + w_H$. Comme $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w_G = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. De même, comme $H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, il existe $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w_H = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. On obtient

$$w = w_G + w_H = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2.$$

On en déduit que w est une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, v_1 et v_2 donc $w \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Il suit que $G + H \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$.
Soit $w \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Il existe donc $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. En notant $w_G = \alpha_1 u_1 + \beta_2 u_2$ et $w_H = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$, on a $w = w_G + w_H$ avec $w_G \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = G$ et $w_H \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = H$. Donc $w \in G + H$. Il suit que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset G + H$.

c) Par la question précédente, on a

$$G + H = \mathrm{Vect}\,((1,0,1,1), (3,-1,1,0), (-1,-1,1,0), (0,1,0,1))\,.$$

Donc $(x, y, z, t) \in G + H$ si et seulement s'il existe des scalaires a, b, c et d tels que

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) &= a(1,0,1,1) + b(3,-1,1,0) + c(-1,-1,1,0) + d(0,1,0,1) \\ &= (a+3b-c, -b-c+d, a+b+c, a+d),\end{aligned}$$

c'est à dire, si et seulement si le système linéaire suivant est compatible

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+3b-c & = & x \\ -b-c+d & = & y \\ a+b+c & = & z \\ a+d & = & t \end{array}\right.$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss. On échelonne la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 0 & -2 & 2 & 0 & z-x \\ 0 & -3 & 1 & 1 & t-x \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 4 & -2 & z-x-2y \\ 0 & 0 & 4 & -2 & t-x-3y \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 4 & -2 & z-x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-z-y \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - L_3 \end{array}$$

Le système est alors compatible si et seulement si $t-z-y=0$. On en déduit que

$$G+H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t-z-y=0\right\}.$$

d) La somme $G+H$ est directe si et seulement si $G \cap H = \{(0,0,0,0)\}$. Soit $(x,y,z,t) \in G \cap H$. Comme $(x,y,z,t) \in G = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z,t) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1(1,0,1,1) + \alpha_2(3,-1,1,0) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1).$$

De plus, comme $(x,y,z,t) \in H = E \cap F$, on en déduit que (x,y,z,t) est solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y+t & = & 0 \\ x+y+2z-t & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient que $(x,y,z,t) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1) \in G \cap H$ si et seulement si (α_1, α_2) est solution du système

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\alpha_1 + 3\alpha_2) - (-\alpha_2) + \alpha_1 & = & 0 \\ (\alpha_1 + 3\alpha_2) + (-\alpha_2) + 2(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 & = & 0 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0.$$

En choisissant $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_1 = -2\alpha_2 = -2$, on obtient $-2u_1 + u_2 \in G \cap H$ avec

$$-2u_1 + u_2 = -2(1,0,1,1) + (3,-1,1,0) = (1,-1,-1,-2) \neq 0_{\mathbb{R}^4}.$$

On en déduit que $G \cap H \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et donc la somme n'est pas directe.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les quatre vecteurs suivants

$$u = (1, 0, -1), \quad v = (3, -2, 3), \quad w = (2, -1, 1) \quad \text{et} \quad z = (0, -1, 2).$$

a) La famille (u, v, w) est elle libre ou liée ?

b) La famille (u, v, w) est elle génératrice de R^3 ? Si elle ne l'est pas, déterminer le sous-espace vectoriel Vect (u, v, w).

c) La famille (v, w, z) est elle libre ou liée ?

d) La famille (v, w, z) est elle génératrice de R^3 ? Si elle ne l'est pas, déterminer le sous-espace vectoriel Vect (v, w, z).

Correction. a) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors (α, β, γ) est solution du système linéaire homogène dont la matrice augmentée est

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss. On échelonne la matrice

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{array} \end{array}$$

Le système admet 2 variables principales et 1 variable libre, il admet donc une infinité de solutions. On en déduit que (u, v, w) est liée.

b) Si la famille (u, v, w) était génératrice, étant constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ce serait une base de $\mathbb{R}^3$ et elle serait donc libre. Or, on sait déjà que la famille (u, v, w) est liée. On obtient donc que la famille (u, v, w) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$. On détermine maintenant $\text{Vect}(u, v, w)$. Comme $(x, y, z) \in \text{Vect}(u, v, w)$ si et seulement s'il existe des scalaire a, b et c tels que

$$(x, y, z) = a(1, 0, -1) + b(3, -2, 3) + c(2, -1, 1) = (a + 3b + 2c, -2b - c, -a + 3b + c),$$

c'est-à-dire, si et seulement si le système linéaire suivant est compatible

$$\begin{cases} a + 3b + 2c & = & x \\ -2b - c & = & y \\ -a + 3b + c & = & z \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & -2 & -1 & y \\ -1 & 3 & 1 & z \end{array}\right) & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss. On échelonne la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & -2 & -1 & y \\ 0 & 6 & 3 & z+x \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & -2 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+x+3y \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{array}$$

Le système est alors compatible si et seulement si $z + x + 3y = 0$. On en déduit que

$$\text{Vect}(u, v, w) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z + x + 3y = 0\right\}.$$

c) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha v + \beta w + \gamma z = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Alors (α, β, γ) est solution du système linéaire homogène dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss. On échelonne la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 + 2L_1/3 \\ L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 3L_2 \end{array}$$

Le système admet 3 variables principales et aucune variable libre, il admet donc une unique solution qui est $(0, 0, 0)$. On en déduit que (v, w, z) est libre.

d) La famille (v, w, z) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On en conclut que la famille (v, w, z) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

a) On suppose qu'il existe $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $u_k \in \text{Vect}(\mathcal{G})$, où

$$\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_p)$$

est la famille $\mathcal{F}$ privée du vecteur u_k. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

b) Montrer que la réciproque du résultat précédent est vraie.

c) On suppose maintenant que la famille $\mathcal{F}$ est libre et qu'il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $v \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$. Montrer que la famille

$$(u_1, \ldots, u_p, v)$$

est libre.

Correction. a) Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $u_k \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$u_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \lambda_i u_i.$$

Alors, on a

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \lambda_i u_i - u_k = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

C'est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ qui s'annule et dont les coefficients ne sont pas tous nuls, puisque le coefficient de u_k est -1. La famille $\mathcal{F}$ est donc liée.

b) Supposons que la famille $\mathcal{F}$ soit liée. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors

$$\lambda_k u_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \lambda_i u_i$$

et, comme $\lambda_k \neq 0$, on obtient

$$u_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} u_i \in \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_p\right).$$

On a bien montré qu'il existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $u_k \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est la famille $\mathcal{F}$ privée du vecteur u_k.

c) On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est libre et qu'il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $v \notin \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \mu v = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

On veut montrer qu'alors tous ces scalaires sont nuls. Si $\mu \neq 0$, alors on peut diviser par μ et

$$v = -\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\mu} u_i \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}),$$

ce qui est impossible car $v \notin \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ par hypothèse. On a donc $\mu = 0$. Il suit que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

La famille $\mathcal{F}$ étant libre, on obtient que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Tous les coefficients de la combinaison linéaire considérée sont nuls, la famille $(u_1, \ldots, u_p, v)$ est donc libre.