Université de Montpellier

Faculté des Sciences

HA8201H - Maths PEIP S2

Devoir Encadré n°1 du 13/02/2026

Exercice 1. Soit E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe un réel strictement positif $A \in \mathbb{R}_+^*$ et deux applications $g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geqslant A \implies f(x) = g(x) - h(x).$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les trois sous-espaces vectoriels suivants

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + t = 0\right\}, \quad F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + 2z - t = 0\right\}$$

et

$$G = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)\,, \text{ où } u_1 = (1, 0, 1, 1) \text{ et } u_2 = (3, -1, 1, 0).$$

a) On note $H = E \cap F$. Déterminer une famille de deux vecteurs (v_1, v_2) qui engendre le sous-espace vectoriel H.

b) Montrer que

$$G + H = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, v_1, v_2)\,.$$

c) En déduire une représentation cartésienne de $G + H$.

d) La somme $G + H$ est-elle directe ?

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les quatre vecteurs suivants

$$u = (1, 0, -1), \quad v = (3, -2, 3), \quad w = (2, -1, 1) \quad \text{et} \quad z = (0, -1, 2).$$

a) La famille (u, v, w) est elle libre ou liée ?

b) La famille (u, v, w) est elle génératrice de R^3 ? Si elle ne l'est pas, déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(u, v, w)$.

c) La famille (v, w, z) est elle libre ou liée ?

d) La famille (v, w, z) est elle génératrice de R^3 ? Si elle ne l'est pas, déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(v, w, z)$.

Tournez, SVP !

Exercice 4. Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

a) On suppose qu'il existe $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $u_k \in \operatorname{Vect}(\mathcal{G})$, où

$$\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_p)$$

est la famille $\mathcal{F}$ privée du vecteur u_k. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

b) Montrer que la réciproque du résultat précédent est vraie.

c) On suppose maintenant que la famille $\mathcal{F}$ est libre et qu'il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $v \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$. Montrer que la famille

$$(u_1, \ldots, u_p, v)$$

est libre.